Лекция 7. Грассманианы

Теорема о размерности слоев — важный инструмент в работе с семействами алгебраических многообразий. Продемонстрируем, как работают с семействами, на простейшем и основополагающем примере грассманианов — семейств линейных пространств.

Определение 7.1. Пусть E — конечномерное линейное пространство над основным полем, m — целое число, $0 < m < \dim E$. Множество m-мерных векторных подпространств пространства E называется *грассманианом.* Мы будем обозначать это множество $G(m, E)$.

Множество r — мерных линейных подпространств проективного пространства $\mathbb{P}^n$, где $0 \leqslant r < n$, также называется грассманианом; мы будем обозначать это множество $\mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$.

Если проективное пространство $\mathbb{P}(E)$ — проективизация векторного пространства E (т.е. множество прямых в E), то $G(m, E)$ естественно отождествляется с $\mathrm{Gr}(m-1, \mathbb{P}(E))$. Если $\dim E = n$, то вместо $G(m, E)$ мы будем иногда писать $G(m, n)$, и аналогично будем писать $\mathrm{Gr}(r, n)$ вместо $\mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$[1] .

Сейчас мы объясним, как ввести на грассманиане $G(m, E)$ структуру алгебраического многообразия. Для начала напомним основные свойства внешнего умножения (в форме, пригодной для работы над полями произвольной характеристики).

Пусть E — конечномерное линейное пространство. Через $E^{\otimes m}$ мы будем обозначать тензорное произведение $\underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{m \text{ раз}}$. Пусть $R \subset E^{\otimes m}$ — подпространство, порожденное элементами вида $v_1 \otimes \cdots \otimes v_m$, где $v_i = v_j$ для каких-то i и j. Тогда *m-й внешней степенью* пространства E называется факторпространство $\bigwedge^m E = E^{\otimes m}/R$. Образ $v_1 \otimes \cdots \otimes v_m$ в $\bigwedge^m E$ называется *внешним произведением* векторов $v_1, \ldots, v_m$ и обозначается $v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства E, то внешние произведения $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n$, образуют базис пространства $\bigwedge^m E$.

Естественное билинейное отображение $E^{\otimes m} \otimes E^{\otimes n} \to E^{\otimes (m+n)}$ индуцирует билинейное отображение $\bigwedge^m E \otimes \bigwedge^n E \to \bigwedge^{m+n} E$, называемое *внешним умножением* и обозначаемое $\wedge$.

---

[1] Будьте осторожны с обозначениями! У разных авторов грассманианы обозначаются совершенно по-разному.

Элементы пространства $\bigwedge^m E$ называются m-векторами. Говорят, что m-вектор $\omega \in \bigwedge^m E$ *разложим*, если $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$ для некоторых $v_1, \dots, v_m \in E$.

Теперь мы можем реализовать грассманиан как алгебраическое (и даже проективное) многообразие. Это делается так. Каждому m-мерному векторному подпространству $V \subset E$ поставим в соответствие точку проективного пространства $\mathbb{P}(\bigwedge^m E)$, отвечающую m-вектору $v_1 \wedge \dots \wedge v_m \in \bigwedge^m E$, где $v_1, \dots, v_m$ — какой-то базис в V.

Предложение 7.2. *Вышеописанное отображение из $G(m, E)$ в $\mathbb{P}(\bigwedge^m E)$ корректно определено и задает взаимно однозначное соответствие между $G(m, E)$ и множеством точек в $\mathbb{P}(\bigwedge^m E)$, соответствующих разложимым m-векторам. Указанное множество замкнуто в топологии Зарисского, неприводимо и имеет размерность $m(n-m)$, где $n = \dim E$.*

Доказательство. При смене базиса в V внешнее произведение его элементов умножается на определитель матрицы перехода; стало быть, отображение из $G(m, E)$ в $\mathbb{P}(\bigwedge^m E)$ определено корректно. Очевидно, всякий ненулевой разложимый m-вектор $v_1 \wedge \dots \wedge v_m$ соответствует подпространству, натянутому на $v_1, \dots, v_m$. Покажем, что двум различным m-мерным подпространствам V и V' соответствуют при этом отображении разные точки пространства $\mathbb{P}(\bigwedge^m E)$. В самом деле, выберем базис $e_1, \dots, e_n$ в E таким образом, чтобы $e_1, \dots, e_r$, где $r < m$, был базисом в $V \cap V'$, $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_m$ был базисом в V, и $e_1, \dots, e_r, e_{m+1}, \dots e_{m+(m-r)}$ был базисом в V'. Тогда m-векторы $e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge e_{r+1} \wedge \dots \wedge e_m$ и $e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge e_{m+1} \wedge \dots \wedge e_{m+(m-r)}$, являясь различными элементами одного и того же базиса $\bigwedge^m E$, непропорциональны. Тем самым вложение $G(m, E)$ в $\mathbb{P}(\bigwedge^m E)$ построено. Отождествим $G(m, E)$ с подмножеством $\mathbb{P}(\bigwedge^m E)$, являющимся образом при этом вложении.

Чтобы доказать, что подмножество $G(m, E) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^m E)$ замкнуто по Зарисскому, рассмотрим линейное отображение $\Phi_\omega \colon E \to \bigwedge^{m+1} E$, задаваемое внешним умножением на ω, где $\omega \in \bigwedge^m E$ — ненулевой m-вектор.

Лемма 7.3. *Если $0 \neq \omega \in \bigwedge^m E$, то $\dim \operatorname{Ker} \Phi_\omega \leqslant m$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда ω разложим.*

Доказательство леммы. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — такой базис E, что $e_1, \dots, e_r$ — базис подпространства $\operatorname{Ker} \Phi_\omega$. Для каждого m-элементного подмножества $S \subset [1;n]$ положим $e_S = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$, где $i_1, \ldots, i_m$ — элементы S, записанные в возрастающем порядке, и пусть $\omega = \sum a_S e_S$. Из равенства $\omega \wedge e_j = 0$ вытекает, что $a_S = 0$ при $j \notin S$. Стало быть, из $a_S \neq 0$ вытекает, что $S \supset [1;r]$. Следовательно, $r \leqslant m$, и при достижении равенства имеем $a_S \neq 0$ как только $S \neq [1;m]$. Лемма доказана. $\square$

Ввиду леммы, m-вектор ω разложим тогда и только тогда, когда ранг отображения Φ_ω не превосходит $n - m$. Условие на ранг представляет собой систему однородных уравнений на коэффициенты ω; это доказывает замкнутость по Зарисскому грассманиана $G(m, E) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^m E)$.

Чтобы доказать неприводимость $G(m, E)$, заметим, что полная линейная группа $G = GL(E)$ действует на $\bigwedge^m E$ и тем самым на $\mathbb{P}(\bigwedge^m E)$ и что $G(m, E)$ при этом действии является ее орбитой (действительно, под действием линейного преобразования пространства E разложимый поливектор переходит в разложимый, и всякие два m-мерные подпространства в E можно перевести друг в друга линейным преобразованием). Поскольку G является неприводимым аффинным многообразием (открытым подмножеством $\mathbb{A}^{n^2}$) и отображение $g \mapsto g \cdot p$, где $g \in G$ и p — фиксированная точка $G(m, E)$, является морфизмом из G в $\mathbb{P}(\bigwedge^m E)$, получаем, что подмножество $G(m, E) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^m E)$, будучи образом неприводимого множества при непрерывном в топологии Зарисского отображении, также неприводимо.

Чтобы, наконец, подсчитать размерность $G(m, E)$, рассмотрим подгруппу $G_1 \subset G$, состоящую из линейных преобразований, переводящих в себя подпространство $V \subset E$, соответствующее точке $p \in G(m, E)$. Эта подгруппа также является аффинным многообразием (открытым подмножеством $\mathbb{A}^{n^2 - m(n-m)}$). Если рассматривать отображение $g \mapsto g \cdot p$ как морфизм из G на $G(m, E)$, то слоями этого морфизма являются смежные классы G по G_1. Каждый из этих слоев изоморфен G_1. По теореме о размерности слоев имеем $\dim G(m, E) = \dim G - \dim G_1 = m(n - m)$. Предложение доказано. $\square$

Построенное нами вложение грассманиана в проективное пространство называется *плюккеровым вложением,* а однородные координаты точки в $\mathbb{P}(\bigwedge^m E)$, соответствующей подпространству $V \subset E$, называются *плюккеровыми координатами* этого подпространства. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства E, и если подпространство $V \subset E$ имеет базис $f_1, \ldots, f_m$, где $f_i = \sum a_{ij} e_j$, то плюккеровы координаты подпространства $V \subset E$ суть $m \times m$-миноры матрицы $\|a_{ij}\|$.

Построенная в доказательстве предложения система однородных уравнений, задающих грассманиан, обладает тем недостатком, что не порождает его однородный идеал. На самом деле этот идеал порожден квадратичными уравнениями. Эту тему мы еще обсудим подробнее, а пока что разберем один важный частный случай, когда квадратичные соотношения между плюккеровыми координатами выписать легко:

Предложение 7.4. *Если E — конечномерное векторное пространство над полем, характеристика которого не равна 2, то бивектор $\omega \in \bigwedge^2 E$ разложим тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$.*

Доказательство. Часть «только тогда» очевидна: если $\omega = v \wedge w$, то $\omega \wedge \omega = -v \wedge v \wedge w \wedge w = 0$. Для доказательства части «тогда» пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис E; проведем индукцию по n. Если $n = 2$, то все бивекторы пропорциональны $e_1 \wedge e_2$, так что наше предложение верно. Пусть оно доказано для $\dim E = n - 1$. Подпространство в E, порожденное $e_1, \ldots, e_{n-1}$, обозначим E'. Всякий бивектор можно записать в виде $\omega = \omega' + v \wedge e_n$, где $\omega' \in \bigwedge^2 E'$ и $v \in E'$. Пусть $\omega \wedge \omega = 0$. Если $\omega' = 0$, то ω, очевидно, разложим; в противном случае, разделяя в равенстве

$$\omega \wedge \omega = \omega' \wedge \omega' + 2\,\omega' \wedge v \wedge e_n$$

слагаемые, содержащие и не содержащие e_n в своем разложении по базису, состоящему из $e_i \wedge e_j$, получаем, что

$$\omega' \wedge \omega' = 0; \tag{7.1}$$

$$2\,\omega' \wedge v \wedge e_n = 0. \tag{7.2}$$

Из (7.1) и предположения индукции следует, что $\omega' = x \wedge y$, где $x, y \in E' \subset E$. Поскольку характеристика отлична от 2, из (7.2) следует, что $\omega' \wedge v \wedge e_n = 0$; учитывая, что $v \in E'$, получаем отсюда, что $\omega' \wedge v = 0$, так что $v = \lambda x + \mu y$ для некоторых $\lambda, \mu \in k$. Отсюда $\omega = (x - \mu e_n) \wedge (y + \lambda e_n)$, а это и означает, что бивектор ω разложим. □

Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис E и $\omega = \sum\limits_{i<j} p_{ij} e_i \wedge e_j$, то коэффициент при $e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l$ у $\omega \wedge \omega$ равен $2(p_{ij}p_{kl} - p_{ik}p_{jl} + p_{il}p_{jk})$ (если $i < j < k < l$). Стало быть, в характеристике, отличной от 2, условие разложимости бивектора в n-мерном пространстве равносильно системе $\binom{n}{4}$ квадратичных уравнений

$$p_{ij}p_{kl} - p_{ik}p_{jl} + p_{il}p_{jk} = 0, \qquad \text{как только } 1 \leqslant i < j < k < l \leqslant n \tag{7.3}$$

на плюккеровы координаты. На самом деле уравнения (7.3) задают $G(2,n)$ в плюккеровом вложении над полем произвольной характеристики, хотя предложение 7.4 в характеристике 2 неверно (разберитесь, почему).

Все особенно просто, если $n = 4$. Тогда система уравнений (7.3) сводится к одному-единственному уравнению

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Отсюда

Следствие 7.5. *Грассманиан* $\mathrm{Gr}(1,3)$ *прямых в* $\mathbb{P}^3$ *в плюккеровом вложении является неособой квадрикой в* $\mathbb{P}^5$.

Все прочие грассманианы (за тривиальным исключением $G(1,n)$ и $G(n-1,n)$: эти грассманианы являются просто проективными пространствами) гиперповерхностям отнюдь не изоморфны.

Свойства взаимного расположения линейных подпространств в $\mathbb{P}^n$ можно переформулировать как геометрические свойства грассманиана. Ниже приведено несколько примеров такой переформулировки. При этом мы пользуемся следующим обозначением: если $\alpha \in \mathrm{Gr}(r,\mathbb{P}^n)$ — точка грассманиана, то $L_\alpha \subset \mathbb{P}^n$ — соответствующее ей линейное подпространство.

1) Пусть $p \in \mathbb{P}^3$. Тогда $\{\,\alpha \in \mathrm{Gr}(1,\mathbb{P}^3) \mid L_\alpha \ni p\,\}$ — плоскость, лежащая на $\mathrm{Gr}(1,\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^5$ (здесь и дальше подразумевается, что грассманианы вложены по Плюккеру в соответствующие проективные пространства).

2) Пусть $P \subset \mathbb{P}^3$ — плоскость. Тогда $\{\,\alpha \in \mathrm{Gr}(1,\mathbb{P}^3) \mid L_\alpha \subset P\,\}$ — также плоскость, лежащая на $\mathrm{Gr}(1,\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^5$. Всякая плоскость, лежащая на $\mathrm{Gr}(1,\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^5$, имеет вид, описанный в этом или предыдущем пункте.

3) Пусть $\alpha, \beta \in \mathrm{Gr}(1,\mathbb{P}^n)$. Тогда прямые L_α и L_β пересекаются тогда и только тогда, когда прямая $\overline{\alpha\beta}$ целиком лежит на $\mathrm{Gr}(1,\mathbb{P}^n)$.

4) Пусть $\ell \subset \mathrm{Gr}(1,\mathbb{P}^n)$ — прямая, целиком лежащая на грассманиане. Тогда существуют такие плоскость $P \subset \mathbb{P}^n$ и точка $p \in P$, что

$$\ell = \{\,\alpha \mid p \in L_\alpha \subset P\,\}.$$

5) Пусть $X = \{ \alpha \in \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n) \mid L_\alpha \cap P \neq \varnothing \}$, где $P \subset \mathbb{P}^n$ — фиксированное линейное подпространство размерности $n-r-1$. Тогда X является пересечением грассманиана $\mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$ с некоторой гиперплоскостью (многообразие X является простейшим примером «многообразий Шуберта»).

Докажем, для примера, утверждение (3). Пусть $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(E)$, тогда $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^n)$ можно отождествить с $G(2, E)$. Если L_α и L_β пересекаются и не совпадают, то двумерные векторные подпространства $\tilde{L}_\alpha, \tilde{L}_\beta \subset E$, соответствующие α и β, имеют одномерное пересечение. Стало быть, разложимые бивекторы, соответствующие α и β, можно записать в виде $x \wedge y$ и $x \wedge z$, где x — образующая $\tilde{L}_\alpha \cap \tilde{L}_\beta$. Всякая линейная комбинация этих бивекторов имеет вид $x \wedge (\lambda y + \mu z)$ и тем самым тоже разложима; это и означает, что вякая точка прямой, соединяющей α и β, лежит на $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+1}{2}-1}$. Пусть, напротив, прямая, соединяющая α и β, лежит на грассманиане. Ограничимся случаем, когда характеристика не равна 2 (общий случай заинтересованный слушатель может разобрать самостоятельно). Если $x \wedge y$ и $x' \wedge y'$ — разложимые бивекторы, соответствующие α и β соответственно, то всякая их линейная комбинация также должна быть разложима. Стало быть,

$$(\lambda x \wedge y + \mu x' \wedge y') \wedge (\lambda x \wedge y + \mu x' \wedge y') = 2\,\lambda\mu x \wedge y \wedge x' \wedge y' = 0$$

для любых λ и μ из основного поля. Так как характеристика отлична от 2, отсюда следует, что векторы x, y, x', y' линейно зависимы; стало быть, прямые L_α и L_β, соответствующие двумерным векторным подпространствам, порожденным x и y и x' и y' соответственно, должны пересекаться. □

Теперь займемся семействами линейных подпространств. Рассмотрим грассманиан $\mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$, параметризующий r-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}^n$. Отождествив его с $G(r+1, n+1)$, видим, что $\mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$ — проективное многообразие размерности $(r+1)(n-r)$. Для точки $\alpha \in \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$ соответствующее ей линейное подпространство будем по-прежнему обозначать через $L_\alpha \subset \mathbb{P}^n$. Следующее предложение, доказательство которого важнее для нас, чем формулировка, показывает, что множество линейных пространств, лежащих на данном *проективном* многообразии, замкнуто в грассманиане (еще одно проявление того обстоятельства, что проективные многообразия обладают свойством, аналогичным компактности!).

Предложение 7.6. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие. Множество $B = \{ \alpha \in \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n) \mid L_\alpha \subset X \}$ замкнуто в $\mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$.*

Доказательство. Начнем с того, что построим так называемое «универсальное семейство r-мерных линейных подпространств». Именно, пусть $\mathbb{L} = \{\, (x, \alpha) \in \mathbb{P}^n \times \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n) \mid x \in L_\alpha \,\}$. Легко видеть, что $\mathbb{L}$ замкнуто по Зарисскому в $\mathbb{P}^n \times \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$. В самом деле, пусть $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(E)$, пусть вектор $v \in E$ соответствует точке $x \in \mathbb{P}^n$, и пусть $(r+1)$-вектор ω соответствует точке $\alpha \in \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$. Тогда $x \in L_\alpha$ в том и только том случае, когда $v \wedge \omega = 0$. Это равенство представляет собой систему однородных уравнений на однородные координаты x и плюккеровы координаты α, что и доказывает замкнутость $\mathbb{L}$. Обозначим проекции $\mathbb{L}$ на $\mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$ и $\mathbb{P}^n$ буквами p и q соответственно. Если $\alpha \in \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$, то $p^{-1}(\alpha) \subset \mathbb{P}^n \times \{\alpha\} \cong \mathbb{P}^n$ совпадает с подпространством $L_\alpha \subset \mathbb{P}^n$. Если же $x \in \mathbb{P}^n$, то $q^{-1}(x)$, где $x \in \mathbb{P}^n$, есть множество линейных пространств размерности m, содержащих точку x; нетрудно показать (это — упражнение для слушателей), что $q^{-1}(x) \subset \{x\} \times \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$ совпадает с грассманианом $\mathrm{Gr}(r-1, n-1)$ в плюккеровом вложении. В частности, слои q неприводимы.

Отображение $p\colon \mathbb{L} \to \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$ называется *универсальным семейством r-мерных линейных подпространств*, а множество $\mathbb{L}$ (вскоре мы увидим, что оно неприводимо и тем самым является многообразием) называется *тотальным пространством* этого семейства. Другое название для $\mathbb{L}$ — *многообразие инцидентности.*

Вернемся теперь к доказательству предложения. Ясно, что множество

$$q^{-1}(X) = \{\, (x, \alpha) \in X \times \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n) \mid x \in L_\alpha \,\}$$

замкнуто. Покажем, что оно неприводимо. Это мгновенно вытекает из следующего признака неприводимости, если положить в нем $U = \mathbb{P}^n \times \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$, $V = X$, $Z = q^{-1}(X)$ и $\varphi = q$ (из этого же признака вытекает неприводимость $\mathbb{L}$):

Предложение 7.7. *Пусть $\varphi\colon U \to V$ — проективный морфизм алгебраических многообразий, и пусть $Z \subset U$ — замкнутое подмножество. Если все слои ограничения $\varphi|_Z\colon Z \to V$ неприводимы и имеют одинаковую размерность, то множество Z неприводимо.*

Условие постоянства размерности слоев отбросить в этом предложении нельзя (пример: $U = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $V = \mathbb{P}^1$, $Z = (\mathbb{P}^1 \times \{a\}) \cup (\{b\} \times \mathbb{P}^1)$, φ — проекция на второй сомножитель).

Доказательство признака неприводимости. Пусть $Z = \cup Z_i$ — разложение Z на неприводимые компоненты, и пусть r — размерность всех слоев отображения $\varphi|_Z$. Всякая компонента всякого слоя ограничения

$\varphi|_{Z_j}\colon Z_j \to V$ имеет размерность не более r; следовательно, по теореме о полунепрерывности размерностей слоев при проективных морфизмах (теорема 6.10), все множества $W_i = \{\, y \in V \mid \dim(\varphi^{-1}(y) \cap Z_i) = r \,\}$ замкнуты в V. По условию, $V = \bigcup W_i$; так как V неприводимо, то какое-то из W_i (скажем, W_1) совпадает с V. Тогда $\varphi(Z_1) = V$ и все слои $\varphi|_{Z_1}$ над точками V имеют размерность r. Эти слои содержатся в слоях $\varphi|_Z$; так как эти последние неприводимы и также имеют размерность r, то слои $\varphi|_{Z_1}$ и $\varphi|_Z$ совпадают, откуда $Z = Z_1$. Предложение доказано. $\square$

Рассмотрим теперь морфизм $\varphi = p|_{q^{-1}(X)}\colon q^{-1}(X) \to \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n)$. Слой φ над α есть $X \cap L_\alpha$; поэтому множество $B = \{\, \alpha \in \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^n) \mid \dim \varphi^{-1}(\alpha) = r \,\}$ есть множество точек грассманиана, слои морфизма φ над которыми имеют максимальную размерность. Теперь из полунепрерывности размерности слоев (теорема 6.10) следует, что B замкнуто в грассманиане, что и требовалось. $\square$

Давайте теперь выясним, какова максимально возможная размерность семейства r-мерных проективных пространств, лежащих на проективном многообразии. Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой Беньямино Сегре[2)]:

Теорема 7.8. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — проективное многообразие, $\dim X = n$. Тогда размерность семейства r-мерных линейных пространств, лежащих на X, не превосходит $\dim \mathrm{Gr}(r, n)$; равенство достигается тогда и только тогда, когда X совпадает с каким-то линейным подпространством $\mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^N$.*

Доказательство. Положим $\delta(r, n) = \dim \mathrm{Gr}(r, n) = (r+1)(n-r)$ и будем доказывать теорему индукцией по $n - r$. Если $n - r = 0$, то размерность семейства r-мерных линейных пространств, лежащих на X, равна $\delta(r, n) = 0$ тогда и только тогда, когда X содержит n-мерное линейное пространство и тем самым совпадает с ним, что и требовалось. Проведем шаг индукции. Пусть $B \subset \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^N)$ — неприводимое замкнутое подмножество, такое, что $\dim B \geqslant \delta(r, n)$ и $L_\alpha \subset X$ для всех $\alpha \in B$.

Лемма 7.9. *Если $x \in X$ — произвольная точка, то многообразие X является объединением содержащих x подпространств L_α, где $\alpha \in B$.*

Вывод теоремы из леммы. Пусть $x, x_1 \in X$. Тогда по лемме существует линейное пространство L_α, лежащее в X и содержащее x и x_1. В частности, прямая, соединяющая x и x_1, лежит в X, так что X является

[2)] Многообразие Сегре названо в честь его дяди Коррадо Сегре.

линейным подпространством в $\mathbb{P}^N$ (n-мерным, поскольку $\dim X = n$), и размерность семейства r-мерных линейных подпространств на X равна в точности $\delta(r, n)$. $\square$

Доказательство леммы. Пусть $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}^N \times \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^N)$ — универсальное семейство r-мерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^N$, и пусть $p\colon \mathbb{L} \to \mathrm{Gr}(r, \mathbb{P}^N)$ — естественная проекция. Положим $T = p^{-1}(B)$. Предложение 7.7 показывает, что замкнутое множество T неприводимо. Так как все слои морфизма $p\colon T \to B$ изоморфны $\mathbb{P}^r$, теорема о размерности слоев показывает, что $\dim T = \dim B + r \geqslant \delta(r, n) + r$. Пусть морфизм $q\colon T \to \mathbb{P}^N$ действует по правилу $(x, \alpha) \mapsto x$. Так как B — семейство линейных подпространств, *лежащих на* X, то $q(T) \subset X$, и далее мы будем рассматривать q как морфизм из T в X. Пусть $x \in q(T) \subset X$ и пусть Z' — какая-нибудь из компонент $q^{-1}(x)$. Теорема о размерности слоев, примененная к q, показывает, что $\dim Z' \geqslant \dim T - \dim X \geqslant \delta(r, n) + r - n$. Замкнутое (поскольку морфизм p проективен) подмножество $Z = p(Z') \subset B$ является семейством линейных пространств L_α с $\alpha \in B$, содержащих x. Положим $R = p^{-1}(Z)$; для доказательства леммы нам надо показать, что $q(R) = X$.

Докажем это равенство. Во-первых, из предложения 7.7 следует, что R неприводимо. Поскольку ограничение p на Z' взаимно однозначно, теорема о размерности слоев показывает, что

$$\dim Z = \dim Z' \geqslant \delta(r, n) + r - n = r(n - r), \tag{7.4}$$

откуда снова по теореме о размерности слоев имеем $\dim R = \dim Z + r \geqslant r(n - r) + r$. Если $p(R) = Y \neq X$, то Y — проективное многообразие, и $\dim Y \leqslant n - 1$. Многообразие Y является объединением линейных подпространств, проходящих через x. Пусть $H \subset \mathbb{P}^N$ — гиперплоскость, не проходящая через x. По теореме 6.5 все компоненты $H \cap Y$ имеют размерность $\leqslant n - 2$. Заметим теперь, что в замкнутом подмножестве $H \cap Y \subset \mathbb{P}^N$ содержится семейство $(r - 1)$-мерных линейных подпространств, имеющее размерность $\dim Z$. Интуитивно это совершенно ясно: для всякой $\alpha \in Z$ в рассмотрим $(r - 1)$-мерное подпространство $L_\alpha \cap H \subset H$. Точнее говоря, легко видеть (проверьте!), что отображение $\alpha \mapsto L_\alpha \cap H$ задает морфизм из Z в $\mathrm{Gr}(r - 1, H)$, и очевидно, что каждый слой этого морфизма состоит из одной точки. Теорема о размерности слоев показывает тогда, что размерность его образа равна $\dim Z$, что и утверждалось. Далее, очевидно, что какая-то из неприводимых компонент $W \subset Y \cap H$ содержит $\dim Z$-мерное семейство $r - 1$-мерных линейных пространств. Это, однако, невозможно: по предположению индукции (мы можем его применить, поскольку $\dim W - (r-1) \leqslant (n-2) - (r-1) < n-r$) размерность семейства $(r-1)$-мерных линейных пространств на W не превосходит $\delta(r-1, n-2) = r(n-r-1)$, что строго меньше $\dim Z$ ввиду неравенства (7.4). Это противоречие завершает доказательство леммы и теоремы. $\square$

Итак, вслед за Беньямино Сегре мы нашли, для каких многообразий размерность семейства линейных пространств, лежащих на них, максимальна. На самом деле Сегре исследовал и случаи, когда эта размерность чуть меньше максимальной. Например, он доказал, что размерность семейства плоскостей, лежащих на n-мерном ($n > 2$) проективном многообразии, может равняться $\delta(2, n) - 2$, но не $\delta(2, n) - 1$.