Лекция 8. Многочлен Гильберта

У нас уже есть три эквивалентных определения размерности: как степени трансцендентности поля рациональных функций, по Круллю (через цепочки подмногообразий), а также, для замкнутых подмногообразий $X \subset \mathbb{P}^n$, через максимальную размерность линейного пространства, не задевающего X (следствие 5.13). Сейчас мы дадим еще одну красивую интерпретацию размерности подмногообразия проективного пространства.

Обозначим кольцо многочленов $k[X_0, \ldots, X_n]$ буквой R; через $R_m \subset R$ обозначим подпространство однородных многочленов степени m. Если $I \subset R$ — однородный идеал, то $I_m = I \cap R_m$ обозначает подпространство форм степени m, содержащихся в I.

Определение 8.1. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — замкнутое подмножество (не обязательно неприводимое), $m \geqslant 0$ — целое число. Обозначим $h_X(m) = \dim_k R_m/I_m$, где $I \subset R$ — однородный идеал X (напомним, что он порожден однородными многочленами, обращающимися в нуль на X). Функция $m \mapsto h_X(m)$, определенная на множестве целых неотрицательных чисел, называется *функцией Гильберта* замкнутого подмножества X.

По-другому можно сказать, что $h_X(m)$ — коразмерность условия «тождественно обращаться в нуль на X» в пространстве однородных многочленов степени m. Классики говорили так: «X накладывает $h_X(m)$ независимых линейных условий на гиперповерхности степени m». В дальнейших примерах мы позволим себе называть гиперповерхностью степени m всякое множество вида $V(F) \subset \mathbb{P}^n$, где F — форма степени m.

Пусть, например, X — конечное множество из d точек. Тогда $h_X(m) = d$ при всех $m \geqslant d - 1$. В самом деле, чтобы убедиться, что d точек накладывают независимые условия на гиперповерхности степени $m \geqslant d - 1$, достаточно для каждой точки $p = p_1 \in X$ построить гиперповерхность степени m, проходящую через все точки множества X, кроме p. В качестве таковой можно взять объединение m гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_m$, выбранных так, что H_1 проходит через p_2 и не содержит других точек X, ... , H_{d-1} проходит через p_d и не содержит других точек X, а остальные гиперплоскости не задевают X. При малых m значение $h_X(m)$ зависит от расположения точек. Если, например, X состоит из четырех точек, то $h_X(2)$ равно 4, если не все четыре точки коллинеарны, и 3 в противном случае (квадрика, проходящая через три коллинеарные точки, содержит прямую, на которой эти точки лежат, так что четвертая точка нового условия на квадрики не накладывает).

Рассмотрим еще противоположную крайность: $X = \mathbb{P}^n$. В этом случае $h_X(m) = \dim R_m = \binom{n+m}{n} = \frac{(m+1)\dots(m+n)}{n!}$. Как видите, функция Гильберта оказалась многочленом от m.

Описание поведения $h_X(m)$ при малых значениях m является тяжелой задачей даже в том случае, когда X — конечный набор точек. С другой стороны, при больших значениях аргумента функция Гильберта ведет себя весьма регулярно: она не меняется при непрерывной деформации замкнутого подмножества X (для случая, когда X — конечный набор точек, это проявляется в том, что при больших m число $h_X(m)$ не зависит от их взаимного расположения), а также, опять-таки при больших m, является многочленом от m. По поводу деформаций мы распространяться не будем (в нашем элементарном курсе затруднительно даже дать точные определения), а вот тот факт, что $h_X(m)$ — многочлен от m при больших m, мы и докажем, и подробно обсудим.

Чтобы проследить за поведением функции Гильберта, удобно рассмотреть соответствующую производящую функцию.

Определение 8.2. Степенной ряд $P_X(t) = \sum_{m=0}^{\infty} h_X(m)t^m$ называется *рядом Пуанкаре* замкнутого подмножества $X \subset \mathbb{P}^n$.

Теорема 8.3. *Если $X \subset \mathbb{P}^n$ — замкнутое подмножество, то $P_X(t) = \frac{f(t)}{(1-t)^{n+1}}$, где f — многочлен с целыми коэффициентами.*

Проще всего вывести теорему 8.3 из чуть более общего факта. Напомним, что кольцо S называется *градуированным,* если задано разложение его аддитивной группы в прямую сумму $S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$, причем $S_iS_j \subset S_{i+j}$. Если S — градуированное кольцо, то S-модуль M называется *градуированным,* если задано разложение его аддитивной группы в прямую сумму $M = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty}$, причем $S_iM_j \subset M_{i+j}$. Если M и N — градуированные S-модули, то гомоморфизм S-модулей $f\colon M \to N$ называется *однородным,* если $f(M_i) \subset N_i$. Например, кольцо многочленов $R = \bigoplus R_i$ является градуированным. Если $I \subset R$ — однородный идеал, то I является градуированным R-модулем. Факторкольцо R/I при этом также является градуированным кольцом, а также градуированным R-модулем; естественный гомоморфизм $R \to R/I$ является однородным гомоморфизмом.

Теорема 8.3 является частным случаем (при $M = R/I$, где I — однородный идеал подмножества X) следующего результата:

Теорема 8.4. *Если M — такой конечно порожденный градуированный модуль над кольцом многочленов $R = k[X_0, \dots, X_n]$, что $M_j = 0$ при $j < 0$, и если $P_M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_k M_i \cdot t^i$, то $P_M(t) = \dfrac{f(t)}{(1-t)^{n+1}}$, где f — многочлен с целыми коэффициентами.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Начнем с $n = -1$. При этом $R = k$ (градуированное кольцо, сосредоточенное в степени 0), конечно порожденный градуированный R-модуль представляет собой конечную прямую сумму векторных пространств M_i, и ряд $P_M(t)$ является просто многочленом, так что наше утверждение верно.

Пусть теперь M — градуированный модуль над $k[X_0, \dots, X_n]$. Рассмотрим, наряду с ним, градуированный модуль $M(-1)$ (это — общепринятое обозначение), устроенный следующим образом. $M(-1)$ — тот же R-модуль, что и M, но с измененной градуировкой: $M(-1)_0 = 0$, $M(-1)_1 = M_0$, $M(-1)_2 = M_1$, и вообще $M(-1)_r = M_{r-1}$. Заметим для дальнейшего, что для любого целого числа l можно определить модуль $M(-l)$, отличающийся от M только сдвигом градуировки, по правилу $M(-l)_r = M_{r-l}$.

Умножение на X_n является *однородным* гомоморфизмом из $M(-1)$ в M (ради этой однородности мы и сдвигали градуировку!). Следовательно, ядро и коядро этого гомоморфизма (обозначим их буквами K и C соответственно) также являются градуированными R-модулями, и в точной последовательности

$$0 \to K \to M(-1) \xrightarrow{X_n} M \to C \to 0,$$

все гомоморфизмы однородны. В точной последовательности векторных пространств знакопеременная сумма размерностей равна нулю. Принимая во внимание то очевидное обстоятельство, что $P_{M(-1)}(t) = tP_M(t)$, получаем из нашей точной последовательности тождество

$$P_K(t) - tP_M(t) + P_M(t) - P_C(t) = 0. \tag{8.1}$$

Однако же модули K и C аннулируются умножением на X_n и тем самым являются конечно порожденными градуированными модулями над $k[X_0, \dots, X_{n-1}]$. По предположению индукции, P_K и P_C являются рациональными функциями с $(1-t)^n$ в знаменателе. Выражая P_M из (8.1), получаем все, что требуется. $\square$

Чтобы перейти от производящей функции к самой последовательности чисел $h_X(m)$, воспользуемся следующим элементарным фактом:

Предложение 8.5. *Пусть $P(t)$ — рациональная функция, единственной особенностью которой является полюс порядка s в точке 1. Положим $d = \lim_{t\to 1}(1-t)^s P(t)$, и пусть $P(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m$. Тогда существует такой многочлен p, что $c_m = p(m)$ для всех $m \gg 0$, причем старший член многочлена p равен $(d/(s-1)!)m^{s-1}$.*

Доказательство. Запишем P в виде несократимой дроби $\dfrac{a_0 + a_1 t + \dots + a_r t^r}{(1-t)^s}$. Если $m \geqslant r$, то коэффициент при t^m в разложении $a_j t^j/(1-t)^s$ равен

$$a_j \frac{s(s+1)\dots(s+m-j-1)}{(m-j)!} = \\ = a_j \frac{(m-j+1)(m-j+2)\dots(m-j+s-1)}{(s-1)!}.$$

Это — многочлен от m со старшим членом $(a_j/(s-1)!)m^{s-1}$. Складывая, получим, что c_m при $m \geqslant r$ является значением в точке m многочлена со старшим членом $((a_0+\dots+a_r)/(s-1)!)m^{s-1}$; так как дробь, представляющая $P(t)$, была несократимой, то $a_0+\dots+a_r = d \neq 0$ (в частности, старшие члены не могут взаимно уничтожиться). Все доказано. $\square$

Сопоставляя предложение 8.5 с теоремой 8.3, получаем такое

Следствие 8.6. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — замкнутое подмножество. Тогда существует такой многочлен p_X, что $h_X(m) = p_X(m)$ при всех достаточно больших m.*

Определение 8.7. Многочлен p_X, введенный в предыдущем следствии, называется *многочленом Гильберта* замкнутого подмножества $X \subset \mathbb{P}^n$.

Следующая важная теорема проясняет геометрический смысл многочлена Гильберта.

Теорема 8.8. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, p_X — его многочлен Гильберта. Тогда:*

1) *Степень многочлена p_X равна размерности многообразия X.*

2) *Пусть степень многочлена p_X (равная, в силу пункта (1), размерности X) равна r; запишем старший коэффициент многочлена p_X в виде $d/r!$. Тогда для общего $(n-r)$-мерного линейного*

подпространства $L \subset \mathbb{P}^n$ пересечение $L \cap X$ состоит из d точек (точнее говоря: существует непустое открытое подмножество $U \subset \mathrm{Gr}(n-r, \mathbb{P}^n)$ такое, что для всех $\alpha \in U$ множество $L_\alpha \cap X$ состоит из d точек).

Определение 8.9. Число d, введенное в формулировке предыдущей теоремы, называется *степенью* многообразия X и обозначается $\deg X$.

Мы будем доказывать теорему 8.8 в несколько этапов. Для начала заметим, что теорема верна, если $X = \mathbb{P}^n$. В самом деле, из приведенной выше формулы для $h_{\mathbb{P}^n}(m)$ видно, что эта функция Гильберта является многочленом от m степени n со старшим коэффициентом $1/n!$, что согласуется с обоими утверждениями теоремы. Теперь установим совпадение размерности многообразия и степени многочлена Гильберта в общем случае. Этот факт содержится в следующем более точном предложении:

Предложение 8.10. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, $\dim X = r$. Пусть $L \subset \mathbb{P}^n$ — линейное подпространство размерности $n-r-1$ такое, что $L \cap X = \varnothing$, и пусть $\pi_L \colon X \to \mathbb{P}^r$ — проекция с центром в L. Обозначим буквой d степень индуцированного расширения полей рациональных функций $[k(X) : k(\mathbb{P}^r)]$. Тогда старший член многочлена Гильберта $p_X(m)$ многообразия X имеет вид $(d/r!)m^r$.*

Доказательство. Сразу же заметим, что по соображениям размерности отображение π_L эпиморфно. Пусть $I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ — однородный идеал многообразия X. Положим $S = k[X_0, \dots, X_n]/I$ и $R = k[X_0, \dots, X_r]$. Кольца S и R являются градуированными (однородная компонента $S_m \subset S$ состоит из классов однородных многочленов степени m от $X_0, \dots, X_n$ по модулю идеала I). Проекция π_L, будучи заданной линейными формами от однородных координат в $\mathbb{P}^n$, индуцирует гомоморфизм колец $\pi^* \colon R \to S$, обладающий тем свойством, что $\pi^*(R_m) \subset S_m$, и являющийся, ввиду эпиморфности π_L, вложением. До конца доказательства отождествим R и $\pi^*(R)$ и будем тем самым считать, что $R \subset S$. Нам будет удобно рассматривать S как R-модуль.

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_d$ — базис $k(X)$ над $k(\mathbb{P}^r)$. Рациональные функции на X имеют вид F/G, где F и G лежат в одной и той же однородной компоненте кольца S. Представим все ω_j в таком виде; приведя к общему знаменателю, можно считать, что существует такое число $l > 0$ и такие элементы $F_1, \dots, F_d, G \in S_l$, что $\omega_j = F_j/G$. С другой стороны, элементы поля $k(\mathbb{P}^r)$ суть отношения однородных многочленов одной степени. Поскольку $\omega_1, \ldots, \omega_d$ линейно независимы над $k(\mathbb{P}^r)$, отсюда немедленно следует (проверьте!), что $F_1, \ldots, F_d \in S$ линейно независимы над кольцом R. Стало быть, $F_1, \ldots, F_d$ порождают в S свободный R-подмодуль ранга d. Поскольку умножение на $F_j \in S_l$ сдвигает градуировку на l, этот подмодуль будет изоморфен $R(-l)^d$ — d-кратной прямой сумме модуля $R(-l)$. Итак, мы «оценили S снизу»: установили, что $S \supset R(-l)^d$.

До сих пор мы никак не использовали, что L не задевает X: все наши рассуждения прошли бы (с тривиальными изменениями) и в том случае, если бы проекция π_L была всего лишь доминантным рациональным отображением. Чтобы оценить S сверху, необходимо воспользоваться и тем, что $L \cap X = \varnothing$:

Лемма 8.11. *Кольцо S конечно порождено как R-модуль.*

Доказательство леммы. Пусть $\hat{X} \subset \mathbb{A}^{n+1}$ — аффинный конус над X (напомним, что $\hat{X}$ — подмногообразие в аффинном пространстве $\mathbb{A}^{n+1}$ с неоднородными координатами $X_0, \ldots, X_n$, заданное теми же уравнениями, что и $X \subset \mathbb{P}^n$). Очевидно, $S = k[\hat{X}]$. Если, как в доказательстве теоремы Нётер о нормализации (предложение 5.14), рассмотреть $\mathbb{A}^{n+1}$ как $\mathbb{A}_0^{n+1} \subset \mathbb{P}^{n+1}$, то бесконечно удаленной гиперплоскостью будет то $\mathbb{P}^n$, с которого мы начали; более того, $\overline{\hat{X}} \cap \mathbb{P}^n = X$. В доказательстве предложения 5.14 мы фактически установили, что, для любого аффинного многообразия $Y \subset \mathbb{P}^{n+1}$ и любого линейного пространства $L \subset \mathbb{P}^n$ такого, что $L \cap \overline{Y} = \emptyset$, проекция $\pi_L \colon \overline{Y} \to \mathbb{P}^{n-\dim L}$ индуцирует морфизм $Y \to \mathbb{A}^{n-\dim L}$, причем соответствующий гомоморфизм колец $k[\mathbb{A}^{n-\dim L}] \to k[Y]$ является целым. Полагая в этом утверждении $Y = \hat{X}$, получаем нашу лемму. □

Продолжим доказательство предложения. Пусть $H_1, \ldots, H_t \in S$ — образующие S как модуля над R. Можно, очевидно, выбрать их так, чтобы они были однородными, $H_j \in S_{k_j}$. Положим $\varphi_j = H_j/X_0^{k_j}$, где $X_0 \in k[X_0, \ldots, X_r] = R \subset S$. Тогда $\varphi_j \in k(X)$. Разложим φ_j по базису $\omega_1, \ldots, \omega_d$ так:

$$H_j/X_0^{k_j} = \sum (U_{jt}/V_{jt})(F_t/G), \tag{8.2}$$

где U_{jt} и V_{jt} — однородные многочлены одной степени от $X_0, \ldots, X_r$. Если теперь положить $W_j = G \cdot \prod_t V_{jt}$ и избавиться от знаменателей в (8.2), то получим, что $W_j H_j$ лежит в R-подмодуле $M \subset S$, порожденном $G_1, \ldots, G_d$. Как мы уже отмечали, этот подмодуль изоморфен $R(-l)^d$.

Пусть $W = W_1 \dots W_t$; так как $H_1, \dots H_t$ порождают S как R-модуль, получаем, что $W \cdot S \subset M$. Если $W \in S_w$, то $W \cdot S$ изоморфен $S(-w)$ как градуированный R-модуль. Итак, мы имеем такие включения градуированных R-модулей: $S(-w) \subset R(-l)^d \subset S$. Отсюда имеем неравенства для функций Гильберта:

$$h_X(m-w) \leqslant d \cdot h_{\mathbb{P}^r}(m-l) \leqslant h_X(m).$$

Поделим эти неравенства на m^r и устремим m к бесконечности. Принимая во внимание то, что мы уже знаем о функции Гильберта $\mathbb{P}^r$, получаем, что все три предела равны $d/r!$, что и завершает доказательство. $\square$

Итак, предложение 8.10 доказано, а с ним и первая часть теоремы 8.8. Теперь нам остается убедиться, что d — число точек пересечения X с общим линейным подпространством дополнительной размерности. Первый шаг к этому — такое утверждение:

Предложение 8.12. *Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — доминантный морфизм многообразий одинаковой размерности. Тогда для почти всех (то есть для всех из непустого открытого подмножества) точек $y \in Y$ число прообразов y при отображении φ равно сепарабельной степени индуцированного морфизмом φ расширения полей $k(Y) \subset k(X)$.*

Замечание 8.13. В характеристике нуль слово «сепарабельный» можно, разумеется, опустить. В характеристике p, напротив, опустить его никак нельзя. Пусть, например, морфизм $F\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ задается формулой $(x_0 : x_1 \cdots : x_n) \mapsto (x_0^p : x_1^p : \cdots : x_n^p)$ (морфизм Фробениуса). Тогда F взаимно однозначен, в то время как степень расширения полей равна p^n.

Доказательство. Предположим, что нам удалось найти такие открытые подмножества $V \subset X$ и $U \subset Y$, что $\varphi(V) \subset U$ и предложение верно для морфизма $\varphi|_V \colon V \to U$. Тогда, поскольку $\overline{\varphi(X \setminus V)} \neq Y$, прообразы относительно φ почти всех точек $y \in U$ лежат в U, так что предложение верно и для самого морфизма φ.

Имея в виду это замечание, разберем случай, когда поле $k(X)$ порождено над $k(Y)$ одним элементом f. Пусть минимальное уравнение f над $k(X)$ имеет вид $P(f) = f^r + a_1 f^{r-1} + \dots + a_r = 0$, и пусть $U \subset Y$ — аффинное открытое подмножество, на котором определены все a_j; положим $X' = \{\, (y,t) \in U \times \mathbb{A}^1 \mid t^r + a_1(y)t^{r-1} + \dots + a_r(y) = 0 \,\}$. Тогда X' — аффинное многообразие, рациональное отображение $\psi\colon X \to X'$, действующее по правилу $x \mapsto (\varphi(x), f(x))$, является бирациональным изоморфизмом, и $\pi \circ \psi = \varphi$, где $\pi\colon X' \to Y$ — естественная проекция. Бирациональный изоморфизм ψ индуцирует изоморфизм открытых подмножеств в X и X'. Виду замечания в начале доказательства достаточно проверить предложение для морфизма $\pi\colon X' \to U$. Пусть Q — такой сепарабельный над $k(Y)$ многочлен, что $P(T) = Q(T^{p^l})$, где p — характеристика (в характеристике нуль просто $Q = P$). Тогда дискриминант Q, являющийся регулярной функцией на U, не есть тождественный нуль; число прообразов точек U, в которых он не обращается в нуль, равно $\deg Q$, то есть сепарабельной степени расширения.

В общем случае представим расширение $k(X) \supset k(Y)$ в виде башни расширений

$$k(X) = K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_s = k(Y),$$

порожденных одним элементом. Этой башне соответствует последовательность рациональных отображений

$$X = X_1 \dashrightarrow X_2 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_s = Y, \tag{8.3}$$

в которой $k(X_i) = K_i$ и сквозное отображение совпадает с морфизмом $\varphi\colon X \to Y$. Очевидно, в каждом из X_i можно выбрать такое открытое подмножество U_i, что все рациональные отображения из диаграммы (8.3) и все их композиции определены на U_i. По доказанному, предложение верно для каждого из морфизмов $U_i \to U_{i+1}$, стало быть и для их композиции $U_1 \to U_s$ (сепарабельная степень мультипликативна при композиции расширений, а число прообразов общей точки — при композиции морфизмов). Ввиду замечания в начале доказательства, утверждение верно и для морфизма φ. $\square$

Вообще, если $\varphi\colon X \to Y$ — доминантный морфизм многообразий одной размерности, то его *степенью* называется степень индуцированного расширения полей $k(Y) \subset k(X)$; морфизм называется *сепарабельным,* если это расширение сепарабельно. Предложение 8.12 показывает, что для сепарабельных морфизмов (в характеристике нуль, стало быть, для любых морфизмов) это понятие степени согласуется с понятием степени отображения, известным из топологии многообразий.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 8.8. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, $\dim X = r$. Временно назовем хорошими те $(n-r-1)$-мерные линейные подпространства $L \subset \mathbb{P}^n$, для которых π_L — сепарабельный морфизм. Если $L \subset \mathbb{P}^n$ — линейное подпространство размерности $n-r-1$, то слои проекции π_L суть в точности пересечения $L_1 \cap X$, где $L_1 \supset L$ — линейные подпространства размерности $n-r$. Если подпространство L хорошее, то предложения 8.12 и 8.10

показывают, что для общего $(n-r)$-мерного $L_1 \supset L$ число точек пересечения $L_1 \cap X$ равно d, где d — умноженный на $r!$ старший коэффициент многочлена Гильберта X. В нулевой характеристике, очевидно, почти все $n-r-1$-мерные линейные подпространства являются хорошими; в конечной характеристике это тоже верно, но докажем мы это попозже, когда научимся работать с касательными пространствами. Пока что просто зафиксируем утверждение, доказательство которого мы отложили на потом:

Лемма 8.14. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие,* $\dim X = r$. *Тогда для общего $(n-r-1)$-мерного линейного подпространства $L \subset \mathbb{P}^n$ проекция $\pi_L \colon X \to \mathbb{P}^r$ является сепарабельным морфизмом.* $\square$

Нам, стало быть, остается, основываясь на том, что почти все $(n-r-1)$-мерные подпространства хорошие, убедиться, что для почти каждого $(n-d)$-мерного $L_1 \subset \mathbb{P}^n$ найдется хорошее $(n-d-1)$-мерное $L \subset L_1$. Интуитивно это очевидно, формальное доказательство — упражнение для слушателей (указание: рассмотрите множество $\{\,(\alpha,\beta) \in \mathrm{Gr}(n-r-1,\mathbb{P}^n) \times \mathrm{Gr}(n-r,\mathbb{P}^n) \mid L_\alpha \subset L_\beta\,\}$). Этим доказательство теоремы 8.8 завершается.

Приведем примеры вычисления степени. Во-первых, пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность (на сей раз неприводимая) степени d, то есть множество нулей неприводимого однородного многочлена F степени d. Тогда ее однородный идеал порожден F, поэтому, при $m \geqslant d$, имеем $h_X(m) = \dim(R_m/FR_{m-d}) = h_{\mathbb{P}^n}(m) - h_{\mathbb{P}^n}(m-d)$. Как мы знаем, $h_{\mathbb{P}^n}$ является многочленом от m степени n со старшим коэффициентом $1/n!$. Следовательно, h_X при $m \geqslant d$ совпадает с многочленом степени $n-1$ со старшим коэффициентом $n \cdot d/n! = d/(n-1)!$, так что гиперповерхность степени d в наивном смысле и в самом деле имеет степень d.

Следующий пример — многообразие Сегре $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{mn+m+n}$. Пусть $R = k[\dots, Z_{ij}, \dots]$, где $i \in [0;m]$, $j \in [0;n]$, — однородное координатное кольцо объемлющего проективного пространства. Вспомним, что вложение $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ в $\mathbb{P}^{mn+m+n}$ отображает пару $(x_0 : \dots x_m), (y_0 : \dots : y_n)$ в точку с однородными координатами $x_i y_j$. Стало быть, эпиморфизм $R \to R/I$, где I — однородный идеал X, отображает Z_{ij} в $X_i Y_j$, и базисом пространства $(R/I)_t$ является множество всевозможных произведений мономов степени t от $X_0, \dots, X_m$ на мономы t от $Y_0, \dots, Y_m$. Значит, $h_X(t) = h_{\mathbb{P}^m}(t) h_{\mathbb{P}^n}(t)$. Стало быть, h_X — многочлен степени $m+n$ со старшим коэффициентом $1/(m!n!)$. Отсюда заключаем, что, как и должно быть, $\dim X = m+n$, а чтобы найти степень X, надо умножить старший коэффициент многочлена Гильберта на $(\dim X)! = (m+n)!$.

Стало быть, $\deg X = \dfrac{(m+n)!}{m!n!}$. В частности, если $m = n = 1$, эта формула дает $\deg X = 2$, что и не удивительно, так как соответствующее многообразие Сегре — квадрика в $\mathbb{P}^3$.

Еще один пример — *многообразия Веронезе.* Для каждого целого $d > 1$ рассмотрим морфизм $v_d \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}$, переводящий точку $(x_0 : \dots : x_n)$ в точку, однородными координатами которой будут всевозможные мономы степени d от $x_0, x_1, \dots, x_d$. Например, отображение $v_2 \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ задается формулой $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2)$. Морфизмы v_d называются *отображениями Веронезе,* а их образы называются многообразиями Веронезе.

Точка $p \in \mathbb{P}^n$ однозначно восстанавливается по ее образу $v_d(p) \in \mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}$: если $(x_0 : \dots : x_n)$ — однородные координаты p и, скажем, $x_0 \neq 0$, то $(x_0 : \dots : x_n) = (x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \dots : x_0^{d-1}x_n)$. Стало быть, отображение Веронезе взаимно однозначно на свой образ. Нетрудно убедиться (это — упражнение для слушателей), что v_d является изоморфизмом на свой образ и тем самым многообразие Веронезе $v_d(\mathbb{P}^n)$ изоморфно $\mathbb{P}^n$.

Пусть $X = v_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}$; подсчитаем $\deg X$. Легко видеть, что пространство R_m/I_m, где I — однородный идеал X в кольце R многочленов от $\binom{n+d}{n}$ переменных, есть пространство мономов степени md от $X_0, \dots, X_n$. Стало быть, $h_X(m) = h_{\mathbb{P}^n}(md)$; это многочлен степени n со старшим коэффициентом $d^n/n!$, так что $\deg X = d^n$. В частности, кривая $v_n(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^n$ имеет степень n; она называется *нормальной рациональной кривой степени n.*

Не только старший коэффициент, но и остальные коэффициенты многочлена Гильберта p_X имеют геометрический смысл. Особенно важен свободный член: оказывается, что он не зависит от вложения $X \subset \mathbb{P}^n$ и тем самым является инвариантом многообразия X относительно изоморфизма (слушатели могут проверить это на примере многообразий Веронезе). Если X — неособая кривая над полем комплексных чисел, то свободный член ее многочлена Гильберта равен $1-g$, где g — род X как компактной римановой поверхности (слушатели могут проверить это для случаев, когда X — нормальная рациональная кривая или $X \subset \mathbb{P}^2$).

Независимость свободного члена p_X от вложения X в $\mathbb{P}^n$ была полностью доказана только с помощью когомологической техники, в фундаментальной работе Ж.-П. Серра «Когерентные алгебраические пучки». Значения $p_X(m)$ для малых m, когда они отличны от $h_X(m)$, также имеют простую когомологическую интерпретацию.