Лекция 9. Стандартные мономы и циклы Шуберта

Вся эта лекция будет посвящена изучению грассманиана $X = G(m,n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{m}-1}$ в плюккеровом вложении. Мы покажем, что однородный идеал грассманиана в кольце многочленов от $\binom{n}{m}$ переменных порожден своими элементами степени 2, получим описание функции Гильберта X, вычислим степень грассманиана, а по ходу дела познакомимся и с другими интересными вещами. Начнем же с того, что зафиксируем обозначения.

Мы будем изучать грассманиан $G(m,E)$, где E — n-мерное векторное пространство. Выберем в пространстве E базис $e_1, \dots, e_n$. Если $S \subset [1;n]$ — подмножество из m элементов, то обозначим $e_S = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$, где $i_1, \dots, i_m$ — элементы S, записанные в порядке возрастания. Всякий элемент из $\bigwedge^m E$ однозначно записывается в виде $\sum p_S e_S$; числа p_S будем называть, как водится, плюккеровыми координатами. Буквой $I \subset R = k[\dots, p_S, \dots]$ мы обозначим однородный идеал проективного многообразия $G(m,E) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^m E)$. Мы будем еще пользоваться следующим обозначением. Если $i_1, \dots, i_m$ — произвольная последовательность натуральных чисел из интервала $[1;n]$, то $p_{i_1,\dots,i_m}$ будет по определению обозначать тождественный нуль, если среди чисел i_λ есть совпадающие, и εp_S, где $S = \{i_1, \dots, i_m\}$ и ε — знак перестановки, расставляющей последовательность $i_1, \dots, i_m$ в возрастающем порядке, — в противном случае. Если у m-мерного векторного подпространства $V \subset E$ выбран базис $f_1, \dots, f_m$, где $f_i = \sum a_{ij} e_j$, то $p_{i_1,\dots,i_m}$ равен определителю матрицы, составленной из столбцов матрицы $\|a_{ij}\|$ с номерами $i_1, \dots, i_m$ (в указанном порядке).

Для начала докажем, что однородный идеал грассманиана порожден своей компонентой степени 2. Доказательство этого факта будет состоять из нескольких шагов.

Шаг 1. Мы выпишем некоторый набор квадратичных многочленов от плюккеровых координат p_S, тождественно обращающихся в нуль на грассманиане. Однородный идеал в кольце R многочленов от плюккеровых координат, порожденный этими многочленами, обозначим I'.

Шаг 2. Мы выделим некоторое множество мономов от плюккеровых координат, называемых *стандартными мономами,* и докажем, что всякий многочлен от плюккеровых координат сравним по модулю I' с линейной комбинацией стандартных мономов.

Шаг 3. Мы докажем, что стандартные мономы линейно независимы по модулю I.

Из доказанного на втором и третьем шагах будет вытекать, что $I' = I$ (и тем самым I порожден своей компонентой степени 2), а также что стандартные мономы образуют базис кольца R/I как векторного пространства над основным полем. Тем самым мы докажем квадратичную порожденность I, а заодно получим и базис в однородном кольце R/I. Давайте проводить эту программу в жизнь.

Начнем с того, что выпишем в явном виде некоторый набор квадратичных соотношений, которым удовлетворяют плюккеровы координаты точек грассманиана. Зафиксируем следующие данные:

1) Последовательность r натуральных чисел $u_1, \dots, u_r$ и последовательность из $m - r - 1$ натуральных чисел $v_1, \dots, v_{m-r-1}$ ($0 \leqslant r \leqslant m - 1$, все u_i и v_i лежат на интервале $[1; n]$; если $r = 0$, то последовательность $\{u_i\}$ пуста, а если $r = m - 1$, то последовательность $\{v_i\}$ пуста).

2) Возрастающую последовательность из $m + 1$ натурального числа $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_{m+1} \leqslant n$.

Для каждого выбора этих данных $u = (u_1, \dots, u_r)$, $v = (v_1, \dots, v_{m-r-1})$, $j = (j_1, \dots, j_{m+1})$ рассмотрим однородный квадратичный многочлен от плюккеровых координат $P_{u,v,j}$, заданный следующей формулой:

$$P_{u,v,j} = \sum_{1 \leqslant \lambda_1 < \dots < \lambda_{m-r} \leqslant m+1} (-1)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_{m_r}} p_{u_1,\dots,u_r,j_{\lambda_1},\dots,j_{\lambda_{m-r}}} \times$$
$$\times p_{j_1,\dots,j_{\lambda_1 - 1},j_{\lambda_1+1},\dots,j_{\lambda_2-1},j_{\lambda_2+1},\dots,j_{\lambda_{m-r-1}},j_{\lambda_{m-r+1}},\dots,j_{m+1},v_1,\dots,v_{m-r-1}}. \quad (9.1)$$

Предложение 9.1. *Всякий многочлен вида* (9.1) *тождественно равен нулю на* $G(m, E)$.

Пример 9.2. Пусть $m = 2$. Положим $r = 1$, $u = (a)$, $j = (b, c, d)$ (тем самым последовательность v автоматически будет пуста). Тогда соотношение $P_{u,v,j} = 0$ расписывается так:

$$-p_{ab}p_{cd} + p_{ac}p_{bd} - p_{ad}p_{bc} = 0.$$

С точностью до знака это известные нам соотношения (7.3).

Доказательство. Будем рассматривать плюккеровы координаты как миноры в $m \times n$-матрицах. Зафиксируем произвольным образом $m - 1$ вектор-столбец высоты m; обозначим эти вектор-столбцы буквами

$c_{u_1}, \ldots, c_{u_r}, c_{v_1}, \ldots, c_{v_{m-r-1}}$. Теперь рассмотрим выражение (9.1) для многочлена $P_{u,v,j}$ как функцию на множестве упорядоченных наборов из $m+1$ вектор-столбца высоты m следующим образом. Если задан $m+1$ вектор-столбец $a_1, \ldots, a_{m+1}$, то $p_{u_1,\ldots,u_r,j_{\lambda_1},\ldots,j_{\lambda_{m-r}}}$ будет означать определитель $m \times m$-матрицы со столбцами $c_{u_1}, \ldots, c_{u_r}, a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_{m-r}}$ (в указанном порядке); аналогичным образом будем интерпретировать громоздкий второй сомножитель в каждом из слагаемых формулы (9.1). Поскольку в каждом из слагаемых в (9.1) множества индексов j_i, входящих в первый и во второй сомножитель, не пересекаются, построенная нами функция линейна по каждому аргументу. Далее, если какие-то два из вектор-столбцов a_i совпадают, то, как нетрудно видеть, наша функция обращается в нуль. Значит, наша функция кососимметрична. Стало быть, наша функция является тождественным нулем как кососимметричная полилинейная функция от $m+1$ аргумента на m-мерном векторном пространстве.

Рассмотрим теперь произвольную $m \times n$-матрицу A, положим вектор-столбцы $c_{u_1}, \ldots, c_{u_r}$ и $c_{v_1}, \ldots, c_{v_{m-r-1}}$ равными столбцам матрицы A с номерами $u_1, \ldots, u_r$, и $v_1, \ldots, v_{m-r-1}$ соответственно, и положим a_i равным столбцу матрицы A с номером j_i для всякого $i \in [1; m+1]$. При таком выборе параметров $c_{u_1}, \ldots, c_{u_r}$ и $c_{v_1}, \ldots, c_{v_{m-r-1}}$ значение нашей функции на $a_1, \ldots, a_{m+1}$ равно значению многочлена $P_{u,v,j}$ на плюккеровых координатах m-мерного подпространства в E, соответствующего матрице A. Так как функция является тождественным нулем, все доказано. $\square$

Замечание 9.3. Система квадратичных соотношений $P_{u,v,j} = 0$ отнюдь не является минимальной: среди них много и линейно зависимых, и «соотношений» вида $0 = 0$. На самом деле можно ограничиться соотношениями $P_{u,v,j} = 0$, для которых $r = m-1$ (эта система соотношений тоже не минимальна).

Теперь приступим ко второму пункту нашей программы: определим стандартные мономы. Пусть $i = (i_1, \ldots, i_m)$ и $j = (j_1, \ldots, j_m)$ — две строго возрастающих последовательности натуральных чисел из интервала $[1; n]$; положим $S = \{i_1, \ldots, i_m\}$ и $T = \{j_1, \ldots, j_m)\}$. Если $i_t \leqslant j_t$ для всех значений индекса t, будем это обстоятельство обозначать $S \preceq T$ или $i \preceq j$. Тем самым на множестве всех m-элементных подмножеств отрезка натурального ряда $[1; n]$ (или, что то же самое, всех строго возрастающих m последовательностей натуральных чисел из интервала $[1; n]$) вводится отношение частичного порядка. Если $S \preceq T$ и $S \neq T$, то будем писать $S \prec T$.

Напомним, что буквой R мы обозначили кольцо многочленов от переменных p_S, где S пробегает все m-элементные подмножества интервала $[1;n]$.

Определение 9.4. Моном от переменных p_S называется *стандартным мономом,* если он может быть представлен виде произведения $p_{S_1}p_{S_2}\dots p_{S_r}$, где $S_1 \preceq S_2 \preceq \dots \preceq S_r$.

Предложение 9.5. *Всякий элемент $f \in R$ сравним с линейной комбинацией стандартных мономов по модулю идеала I', порожденного квадратичными многочленами $R_{u,v,j}$.*

Доказательство. Введем на множестве m-элементных подмножеств интервала $[1;n]$ лексикографическое упорядочение. Именно, если S состоит из чисел $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, а T состоит из чисел $j_1 < j_2 < \dots < j_m$, то будем писать $S < T$, если для некоторого индекса l имеем $i_l < j_l$ и $i_t = j_t$ при $t < l$ (не следует путать лексикографическое упорядочение $<$ с частичным порядком $\prec$, введенным выше).

Лемма 9.6. *Если S и T — два m-элементных подмножества отрезка $[1;n]$, причем $S \not\preceq T$, то $p_Sp_T = g + h$, где $g \in I'_2$, а квадратичный многочлен h является линейной комбинацией слагаемых вида $p_{S'}p_{T'}$, для которых $S' < S$.*

Доказательство леммы. Пусть S состоит из чисел $p_1 < \dots < p_m$ и T состоит из чисел $q_1, \dots, q_m$. Поскольку $S \not\preceq T$, имеем $q_a < p_a$ для некоторого $a \in [1;m]$. Положим теперь $u = (p_1, \dots, p_{a-1})$, $v = (q_{a+1}, \dots, q_m)$, $j = (q_1, \dots, q_a, p_a, \dots, p_m)$. Соотношение $P_{u,v,j} = 0$ выражает p_Sp_T как линейную комбинацию произведений $p_{S'}p_{T'}$, в которых пара (S', T') получается из пары (S, T) обменом каких-то из чисел $p_a, \dots, p_m$ на какие-то из меньших чисел $q_1, \dots, q_a$ (в том же количестве, естественно). Ясно, что каждое из таких S' при лексикографическом упорядочении идет раньше S, что и доказывает лемму. $\square$

Для каждого фиксированного натурального числа r введем лексикографическое упорядочение на множестве выражений вида $p_{S_1}p_{S_2}\dots p_{S_r}$ (порядок множителей существен) следующим образом: если $f = p_{S_1}p_{S_2}\dots p_{S_r}$ и $g = p_{T_1}p_{T_2}\dots p_{T_r}$, то будем писать $f < g$, если для некоторого индекса d, где $1 \leqslant d \leqslant r$, имеем $S_d < T_d$ и $S_a = T_a$ при $a < d$.

Чтобы завершить доказательство предложения, рассмотрим моном вида $f = p_{S_1}p_{S_2}\dots p_{S_r}$, где, скажем, $S_b \not\preceq S_{b+1}$ — иначе моном стандартен и доказывать нечего. Тогда, согласно лемме, $S_bS_{b+1} = g + h$, где

$g \in I_2'$, а многочлен h является линейной комбинацией слагаемых вида $p_{S'}p_{T'}$, для которых $S' < S_b$. Стало быть f равен сумме многочлена $p_{S_1} \dots p_{S_{b-1}} g p_{S_{b+2}} \dots p_{S_r}$, лежащего в I', и линейной комбинации мономов вида $p_{S_1} \dots p_{S_{b-1}} p_{S'} p_{T'} p_{S_{b+2}} \dots p_{S_r}$, где $S' < S$. Каждый из этих мономов лексикографически идет раньше, чем f. Если все они стандартны, то все доказано; если среди них есть нестандартные, применим к каждому из них ту же конструкцию. Поскольку на каждом шаге место мономов при лексикографическом упорядочении сдвигается влево, через конечное число шагов этот процесс завершится. $\square$

Теперь докажем, что стандартные мономы линейно независимы в градуированном кольце R/I. Для этого нам придется познакомиться с клетками и циклами Шуберта.

Пусть $E_r \subset E$ обозначает r-мерное подпространство, порожденное базисными векторами $e_1, \dots, e_r$. Мы будем классифицировать m-мерные подпространства E по размерностям их пересечений с E_i.

Определение 9.7. Пусть $a = (a_1, \dots, a_m)$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел из интервала $[1; n]$. *Клеткой Шуберта* $C^a \subset G(m, E)$ называется множество таких $\alpha \in G(m, E)$, что $\dim(V_\alpha \cap E_{a_i}) = i$ для всех i и $\dim(V_\alpha \cap E_j) < i$, как только $j < a_i$.

Циклом Шуберта (синоним: *многообразие Шуберта*) $Z^a \subset G(m, E)$ называется множество таких $\alpha \in G(m, E)$, что $\dim(V_\alpha \cap E_{a_i}) \geqslant i$ для всех i.

Пример 9.8. Если $a = (1, 2, \dots, m)$, то $C^a = Z^a = \{\alpha\}$, где $\alpha \in G(m, E)$ соответствует подпространству $E_m \subset E$. Если $a = (n - m + 1, \dots, n - m + 2, \dots, n)$, то $Z^a = G(m, E)$.

Рассмотрим еще грассманиан $G(2, 4) = \mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^3)$. Кроме уже известных нам $Z^{1,2}$ и $Z^{3,4}$, в нем есть циклы Шуберта $Z^{1,3}$, $Z^{1,4}$, $Z^{2,3}$ и $Z^{2,4}$. Расшифровывая наше определение, получаем, что:

- $Z^{1,3} \subset \mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^3)$ соответствует семейству прямых в $\mathbb{P}^3$, проходящих через данную точку и лежащих в данной плоскости;
- $Z^{1,4} \subset \mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^3)$ соответствует семейству прямых в $\mathbb{P}^3$, проходящих через данную точку.
- $Z^{2,4} \subset \mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^3)$ соответствует семейству прямых в $\mathbb{P}^3$, пересекающихся с данной прямой.

Выясните самостоятельно, что такое в данном случае $Z^{2,3}$.

Предложение 9.9. *Грассманиан $G(m,E)$ является объединением непересекающихся клеток Шуберта C^a для всевозможных строго возрастающих последовательностей a. Всякий цикл Шуберта $Z^a \subset G(m,E)$ является неприводимым замкнутым подмножеством. Клетка Шуберта C^a является открытым плотным подмножеством в Z^a, изоморфным аффинному пространству размерности $(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_m-m)$. Если a и b — две строго возрастающие последовательности натуральных чисел из интервала $[1;n]$, то $Z^a \subset Z^b$ тогда и только тогда, когда $a_j \leqslant b_j$ для всех j (иными словами, когда $a \preceq b$).*

Доказательство. Пусть $a=(a_1,\dots,a_m)$, и пусть $V=V_\alpha\subset E$, где $\alpha\in C^a$. Выберем в пространстве V канонический базис следующим образом.

Поскольку $\dim(V\cap E_{a_1})=1$, существует один, с точностью до пропорциональности, вектор $f_1\in V\cap E_{a_1}$. Поскольку $\dim(V\cap E_{a_1-1})=0$, коэффициент при e_{a_1} в разложении f_1 по базису $e_1,\dots,e_n$ отличен от нуля; выберем f_1 таким образом, чтобы этот коэффициент равнялся единице. Этот выбор однозначен.

Далее, $\dim(V\cap E_{a_2})=2$. Выберем в пространстве $\dim(V\cap E_{a_2})$ базис (f_1,f_2), где у вектора f_2 коэффициент при e_{a_2} равен единице, а коэффициент при e_{a_1} равен нулю (последнего можно добиться за счет прибавления подходящего кратного f_1). Ясно, что такой выбор базиса в $\dim(V\cap E_{a_2})$ также однозначен.

Продолжая в этом духе, мы найдем в пространстве V единственный базис $f_1,\dots,f_m$, имеющий следующий вид (в приведенной ниже матрице строка номер i состоит из коэффициентов в разложении f_i по базису $e_1,\dots,e_n$):

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
* & \dots & * & 1 & 0 & \multicolumn{12}{c}{\dotfill} & 0\\
* & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 1 & 0 & \multicolumn{8}{c}{\dotfill} & 0\\
* & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 1 & 0 & \multicolumn{4}{c}{\dotfill} & 0\\
\multicolumn{18}{c}{\dotfill}\\
* & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 1 & 0 \;\dots & 0
\end{array}
\tag{9.2}
$$

Здесь единицы стоят в столбцах с номерами $a_1,\dots,a_m$, а на месте звездочек могут стоять любые числа.

Количество звездочек в этой матрице равно $d=(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_m-m)$. Стало быть, наша конструкция во всяком случае устанавливает взаимно однозначное соответствие между C^a и аффинным пространством $\mathbb{A}^d$. Остальное — дело техники. Именно, сформулируем сначала в явном виде лемму, которой мы уже неявно пользовались и доказательство которой оставляется слушателям в качестве (не совсем тривиального) упражнения:

Лемма 9.10. *Если $F \subset E$ — векторное подпространство и $r \in [1; m]$, то множество $\{ \alpha \in G(m, E) \mid \dim(V_\alpha \cap F) \geqslant r \}$ замкнуто в $G(m, E)$.* □

Из этой леммы немедленно вытекает замкнутость Z^a в грассманиане. Очевидно, $C^a = Z^a \setminus \bigcup_{b \prec a} Z^b$; отсюда следует открытость C^a в Z^a. Чтобы убедиться, что $Z^a = \overline{C^a}$, теперь достаточно проверить, что $Z^a \subset \overline{C^a}$. В самом деле, пусть $\beta \in Z^a \setminus C^a$; тогда $\beta \in C^b$, где $b \prec a$. Чтобы убедиться, что $\beta \in \overline{C^a}$, достаточно построить морфизм $\varphi\colon \mathbb{A}^1 \to G(m, E)$ такой, что $\varphi(0) = \beta$ и $\varphi(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \subset C^a$. Для построения такого морфизма возьмем какую-нибудь матрицу A вида (9.2); для всякого t из основного поля рассмотрим матрицу A_t, полученную из A умножением некоторых элементов на t. Именно, в первой строке на t умножаются элементы с номерами $b_1 + 1, \ldots, a_1$, во второй строке этому подвергаются элементы с номерами $b_2 + 1, \ldots, a_2$, и т. д. Ясно, что отображение, переводящее t в подпространство в E, порожденное строками матрицы A_t, является искомым морфизмом из $\mathbb{A}^1$ в $G(m, E)$.

Поскольку C^a является, очевидно, образом морфизма $\mathbb{A}^d \to G(m, E)$, где $d = (a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \cdots + (a_m - m)$, а Z^a является, по доказанному, замыканием этого образа, получаем, что Z^a неприводимо. Утверждение о включениях Z^a друг в друга очевидно. Чтобы установить изоморфизм C^a и $\mathbb{A}^d$, остается убедиться, что числа, обозначенные звездочками в матрице 9.2, рационально выражаются через плюккероввы координаты, то есть через $m \times m$-миноры этой матрицы. □

Выясним взаимоотношения между циклами Шуберта и плюккеровыми координатами.

Предложение 9.11. *Пусть $a = (a_1, \ldots, a_m)$ и $b = (b_1, \ldots, b_m)$ — строго возрастающие последовательности натуральных чисел из интервала $[1; n]$. Если $b \not\preceq a$, то плюккерова координата $p_b = p_{b_1,\ldots,b_m}$ тождественно обращается в нуль на цикле Шуберта Z^a.*

С другой стороны, p_a не является тождественным нулем на Z^a.

Доказательство. Из вида матрицы (9.2) ясно, что p_a не обращается в нуль нигде на C^a, откуда следует второе утверждение. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно, ввиду плотности C^a в Z^a, проверить, что p_b есть тождественный нуль на C^a. Из $b \not\preceq a$ вытекает неравенство

$b_j > a_j$ для некоторого j. Значение p_b на элементе C^a, записанном в виде матрицы (9.2), есть $m \times m$-определитель, в котором в столбцах с номерами $j, j+1, \ldots, m$ на первых j местах стоят нули. Такой определитель равен нулю. □

Теперь мы можем наконец доказать линейную независимость стандартных мономов (и более того).

Предложение 9.12. *Пусть $a = (a_1, \ldots, a_m)$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел из интервала $[1; n]$. Тогда мономы вида $p_{b_1} p_{b_2} \ldots p_{b_r}$, где $b_1 \preceq b_2 \preceq \cdots \preceq b_r \preceq a$, линейно независимы в однородном координатном кольце многообразия Шуберта Z^a.*

Полагая, в частности, $a = (n-m+1, \ldots, n-m)$, получаем обещанную линейную независимость стандартных мономов в однородном кольце грассманиана.

Доказательство. Будем действовать по индукции. Если $a = (1, 2, \ldots, m)$, то Z^a — просто точка и независимость мономов вида $(p_{1,2,\ldots,m})^r$ очевидна. Пусть утверждение доказано для всех $Z^{a'}$, где $a' \preceq a$, и пусть f — линейная комбинация мономов степени r и вида, указанного в условии; предположим, что f тождественно обращается в нуль на Z^a, и приведем это предположение к противоречию. В самом деле, ограничим нашу f на циклы Шуберта Z^b, строго содержащиеся в Z^a. Так как $b \prec a$, из предложения 9.11 следует, что при этом тождественно обратятся в нуль все слагаемые, кроме имеющих вид

$$\mathrm{const} \cdot p_{b_1} p_{b_2} \ldots p_{b_r}, \qquad \text{где } b_r \preceq b.$$

Коэффициенты при этих последних должны быть, однако, тождественными нулями, так как по предположению индукции для Z^b наше предложение уже доказано. Перебрав таким образом все многообразия Шуберта, строго содержащиеся в Z^a, получаем, что все слагаемые нашей f должны делиться на p_a. По предложению 9.11 имеем $p_a \neq 0$ в однородном координатном кольце многообразия Z^a, а так как Z^a неприводимо, это кольцо не имеет делителей нуля. Стало быть, можно поделить все слагаемые f на p_a и ограничить то, что получится, на всевозможные $Z^b \subset Z^a$. Продолжая этот процесс, получим, что все коэффициенты равны нулю. □

Сопоставляя результаты предложений 9.5, 9.11 и 9.12, получаем первый основной результат:

Теорема 9.13. *Однородный идеал многообразия Шуберта Z^a порожден своими компонентами степеней 1 и 2. Мономы вида $p_{b_1}p_{b_2}\dots p_{b_r}$, где $b_1 \preceq b_2 \preceq \dots \preceq b_r \preceq a$, образуют базис однородного координатного кольца многообразия Z^a.*

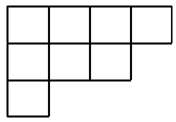
Доказательство. Назовем мономы вида $p_{b_1}p_{b_2}\dots p_{b_r}$, где $b_1 \preceq b_2 \preceq \dots \preceq b_r \preceq a$, a-стандартными. Предложения 9.5 и 9.11 показывают, что всякий многочлен от плюккеровых координат равен в однородном кольце Z^a линейной комбинации a-стандартных мономов, а предложение 9.12 доказывает их линейную независимость. $\square$

Следствие 9.14. *Однородный идеал грассманиана в плюккеровом вложении $G(m,n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{m}-1}$ порожден своей компонентой степени 2. Мономы вида $p_{b_1}p_{b_2}\dots p_{b_r}$, где $b_1 \preceq b_2 \preceq \dots \preceq b_r$, образуют базис однородного координатного кольца многообразия $G(m,n)$.*

Доказанная теорема доставляет подробную информацию о функции Гильберта грассманиана (равно как и любого многообразия Шуберта). Мы воспользуемся этой информацией для вычисления степеней этих многообразий, но сначала перейдем к более традиционным обозначениям для многообразий Шуберта.

Пусть $(a_1,\dots,a_m)$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Положим $u_1 = a_1 - 1, u_2 = a_2 - 2, \dots, u_m = a_m - m$. Тогда $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \dots \leqslant u_m$. Мы будем изображать неубывающую последовательность $u = (u_1,\dots,u_m)$ в виде диаграммы Юнга со столбцами высот $u_1,\dots,u_m$ (справа налево): Если u — неубывающая последова-

$$(1,3,5,6,8) \Longrightarrow (0,1,2,2,3) \Longrightarrow$$



тельность (или диаграмма Юнга), соответствующая строго возрастающей последовательности $a = (a_1,\dots,a_m)$, то вместо Z^a и C^a будем писать Z_u и C_u. В этих обозначениях некоторые из наших результатов выглядят так:

Предложение 9.15. *Многообразия Шуберта, лежащие в грассманиане $G(m,n)$, находятся во взаимно однозначном соответствии с диаграммами Юнга, помещающимися в прямоугольник $m \times (n-m)$. Размерность многообразия Шуберта, соответствующего диаграмме Юнга u, равна количеству клеточек в этой диаграмме. Если u и v —*

диаграммы Юнга, то $Z_u \subseteq Z_v$ тогда и только тогда, когда u содержится в v (здесь и далее мы молчаливо предполагаем, что левый верхний угол всех рассматриваемых нами диаграмм Юнга совпадает с левым верхним углом прямоугольника $m \times (n-m)$). Функция Гильберта $h_{Z_u}(r)$ равна числу последовательностей $v_1, \ldots, v_r$, где все v_j — диаграммы Юнга и $v_1 \subseteq v_2 \subseteq \cdots \subseteq v_r \subseteq u$ (среди v_j может содержаться и «пустая» диаграмма Юнга, соответствующая последовательности $(u_1, \ldots, u_m) = (0, \ldots, 0)$).

Чтобы найти степень многообразий Шуберта (и, в частности, самого грассманиана), воспользуемся таким фактом из комбинаторики:

Лемма 9.16. *Пусть M — конечное множество, частично упорядоченное некоторым отношением $\preceq$. Обозначим через $r(M,i)$ число цепочек вида $a_1 \preceq a_2 \preceq \cdots \preceq a_i$, где все a_i лежат в M (считаем $r(M,0) = 1$ для любого M и $r(\varnothing, i) = 0$ при $i > 0$), и положим $P_M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} r(M,i)t^i$. Тогда P_M является рациональной функцией с единственным полюсом в единице. Порядок l этого полюса равен максимальной длине строго возрастающей цепочки элементов M, а предел $\lim_{t\to 1}(1-t)^l P_M(t)$ равен количеству строго возрастающих цепочек длины l.*

Доказательство. Для каждого $a \in M$ обозначим через $M_a \subset M$ множество элементов M, строго меньших a. Число неубывающих цепочек из i элементов M, заканчивающихся ровно s экземплярами элемента a, равно $r(M_a, i-s)$. Следовательно, $r(M,i) = \sum_{a\in M} \sum_{s=0}^{i-1} r(M_a, i-s)$ при всяком $i > 0$. Теперь запишем:

$$P_M(t) = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} r(M, j+1)t^{j+1} = 1 + \sum_{a\in A} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{j} t^{j+1} r(M_a, j-s) =$$
$$= 1 + \sum_{a\in A} P_{M_a}(t) \cdot (t + t^2 + \cdots) = 1 + \frac{t}{1-t} \sum_{a\in A} P_{M_a}(t).$$

К каждому из $P_{M_a}(t)$ в правой части снова применим это соотношение, и т. д. В конце концов окажется, что порядок полюса P_M в единице равен максимальной длине строго возрастающей цепочки элементов M, а младший коэффициент ряда Лорана P_M в единице равен числу таких цепочек. $\square$

Теперь — классическое

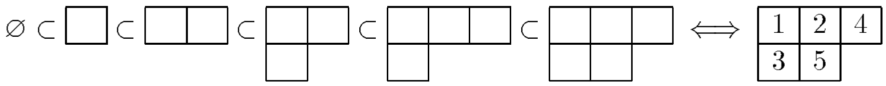
Определение 9.17. Пусть u — диаграмма Юнга, состоящая из d клеточек. *Стандартным табло* типа u называется такая нумерация клеточек диаграммы числами от 1 до d, при которой номера в каждой строке и в каждом столбце возрастают.

Степень многообразий Шуберта (в частности, грассманиана) выражается следующим образом:

Предложение 9.18. *Пусть u — диаграмма Юнга, помещающаяся в прямоугольник $m \times (n-m)$. Тогда степень многообразия Шуберта $Z_u \subset G(m, n)$ равна числу стандартных табло типа u.*

Применив это предложение к диаграмме, совпадающей с прямоугольником $m \times (n-m)$, получим выражение для степени грассманиана.

Доказательство. Пусть $d = \dim Z_u$ равно числу клеток в диаграмме u. Согласно теореме 8.8 и предложению 8.5, порядок полюса $P_{Z_u}(t)$ в единице равен $d+1$, и $\deg Z_u = \lim_{t\to 1}(1-t)^{d+1} P_{Z_u}(t)$, где $P_{Z_u}(t)$ — ряд Пуанкаре многообразия Z_u. Сопоставляя предложение 9.15 с леммой 9.16 (в последней в качестве M рассмотрим множество диаграмм Юнга, помещающихся в прямоугольнике $m \times (n-m)$), получаем, что степень многообразия Шуберта $Z_u \subset G(m, n)$ равна числу последовательностей вида $v_0 \subset v_1 \subset \cdots \subset v_d = u$, где $d = \dim Z_u$ — число клеточек в диаграмме u и все включения строгие. Всякую такую последовательность можно представить как процесс последовательного собирания диаграммы u из клеточек таким образом, чтобы на всех промежуточных этапах у нас также получались диаграммы Юнга. Нумеруя клеточки «в порядке поступления», получим стандартное табло (см. рисунок). Ясно, что по-



строенное соответствие между последовательностями из d вложенных диаграмм и стандартными табло является взаимно однозначным. □

Для количества стандартных табло данного типа существует явная формула (так называемая «формула крюков»), но это уже другая история, к алгебраической геометрии не относящаяся.