Математический Колледж НМУ
Экзамен по алгебре, 1 курс, май 1994

1. Может ли экспонента от вещественной матрицы иметь ЖНФ:

$$\textit{а) (5очков)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \textit{б) (10очков)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. *(10 очков)* Симметрическая и кососимметрическая формы на $\mathbb{R}^{2n}$ заданы сврми матрицами Грама S и A в стандартном базисе. Укажите условия на матрицы S и A, необходимые и достаточные для того, чтобы существовал изоморфизм $\mathbb{R}^{2n}$ с эрмитовым пространством $\mathbb{C}^n$, при котором данные формы отождествлялись бы с действительной и мнимой частями эрмитовой формы на $\mathbb{C}^n$.

3. *(10 очков)* Докажите, что всякая конечная абелева подгруппа в $GL(V)$ над полем $\mathbb{C}$ может в подходящем базисе записана диагональными матрицами.

4. *(20 очков)* Имеются 7 одинаковых банок, на 9/10 наполненных красками всех цветов радуги (в каждой банке — свой цвет). Можно ли, переливая краску из банки в банку, получить хотя бы в одной из банок колер, в котором все 7 красок смешаны в равной пропорции? (Считается, что при переливании краски размешиваются равномерно).

5. *(10 очков)* Даны 4 попарно-скрещивающиеся прямые в $\mathbb{R}^3$. Сколько прямых пересекает каждую из них? (Приведите все возможные ответы и укажите, какие из них устойчивы относительно малых шевелений данных прямых.)

6. *(5 очков)* Пусть A и B — два подмодуля в модуле M, содержащие общий подмодуль N. Докажите, что существует канонические морфизмы $\varphi : A/N \to M/B$ и $\psi : B/N \to M/A$ причем $\ker\varphi \simeq \ker\psi$ и $\operatorname{coker}\varphi \simeq \operatorname{coker}\psi$.

7. Пусть B — невырожденная билинейная форма (про симметричность ничего не предполагается).

   (a) *(10 очков)* Докажите, что существует единственный линейный оператор κ_B, такой что $B(v,w) = B(w, \kappa_B v)\ \forall\ v, w$. Убедитесь, что κ_B является изометрией, выразите его матрицу через матрицу Гране B и покажите, что κB имеет созвратный характеристический многочлен (вместе с каждым корнем λ имеет корень λ^{-1} той же кратности).

(b) *(очков)* Докажите, что над алгебраическим замкнутым полем с $\mathrm{char} \neq 2$ из $\kappa_A = \kappa_B$ следует, что $B(v, w) = A(Cv, Cw)$ для подходящего $C \in GL(V)$.