Некоторые задачи к курсу алгебры

Коммутативные кольца и поля

(1) Решить уравнение $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$.

(2) Выразить $\sin nx$ и $\cos nx$ через $\sin x$ и $\cos x$.

(3) Выразить $\cos \frac{2\pi}{5}$ в радикалах.

(4) Вычислить:

(a)
$$1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots;$$

(b)
$$1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots;$$

(5) Вычислить:

(a)
$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx;$$

(b)
$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx;$$

(c)
$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \dots + \sin^2 (2n-1)x;$$

(d)
$$\cos x + 2\cos 2x + \dots + n\cos nx.$$

(6) Доказать, что
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(x + \varepsilon_k y)^n = x^n + y^n,$$
где $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ — все комплексные корни степени n из 1.

(7) Доказать, что уравнения

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$,

(b) $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$

не имеют целочисленных решений, кроме $x = y = z = 0$.

(8) Доказать, что длина хотя бы одной стороны пифагорова треугольника (прямоугольного треугольника с целыми длинами сторон) делится на 5.

(9) (a) Найдите все такие $x \in \mathbb{Z}_p$ (p — простое), что $x^2 = 1$.

(b) Чему равно произведение всех ненулевых чисел в $\mathbb{Z}_p$ (p — простое)?

(c) Доказать терему Вильсона:
Число p является простым тогда и только тогда, когда
$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

(10) Доказать, что ровно половина чисел в $\mathbb{Z}_p^*$ является квадратами (p — простое, $p > 2$, $\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Z}_p \mid x \neq 0\}$).

(11) Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 = -1$ всегда разрешимо в кольце $\mathbb{Z}_p$ (p — простое).

(12) Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен степени n над $\mathbb{Z}_p$ (p — простое); $I = (f(x))$ — главный идеал в $\mathbb{Z}_p[x]$. Доказать, что факторкольцо $\mathbb{Z}_p[x]/I$ является конечным полем, и найдите число его элементов.

(13) Построить поле из 4 элементов. Доказать, что любые два таких поля изоморфны.

(14) Доказать, что в кольце $\Bbbk[x]$, где $\Bbbk$ — поле, бесконечно много неприводимых многочленов.

(15) Доказать, что множество решений уравнения $x^{p^k} - x = 0$ в поле характеристики p образует подполе.

(16) Построить поле характеристики p, в котором многочлен $x^{p^k} - x$ разлагается на линейные множители. Доказать, что существует поле из p^k элементов.

(17) Пусть $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов характеристики p. Доказать, что $q = p^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и все элементы поля $\mathbb{F}_q$ являются корнями многочлена $x^q - x$.

Группы

(1) Сколько имеется
   (a) отображений из m-элементного множества в n-элементное?
   (b) инъективных отображений из m-элементного множества в n-элементное?

(2) Доказать, что число $1000!/(100!)^{10}$ — целое.

(3) Сколько существует различных ожерелий из 6 бусин красного, синего и желтого цвета?

(4) Доказать, что
   (a) Отображение множества M в множество N является инъективным тогда и только тогда, когда оно имеет левое обратное отображение.
   (b) Отображение множества M в множество N является сюръективным тогда и только тогда, когда оно имеет правое обратное отображение.

(5) Найти знак перестановки
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) Пусть $\sigma \in S_n$ — нечетная перестановка и N — ее порядок в группе S_n. Что можно сказать про четность N?

(7) Доказать, что симметрическая группа S_n порождается транспозицией (12) и циклом $(123\dots n)$.

(8) Какие нормальные подгруппы имеет группа S_3?

(9) Доказать, что группа S_4 имеет, кроме себя самой и единичной подгруппы, лишь следующие нормальные подгруппы:
   (a) знакопеременная группа A_4;
   (b) «четверная группа Клейна»V_4, состоящая из перестановок:
$$e, \quad (12)(34), \quad (13)(24), \quad (14)(23).$$

Показать, что последняя группа абелева.

(10) Доказать, что $S_4/V_4 \cong S_3$.

(11) Доказать, что группа четного порядка содержит элемент порядка 2.

(12) Доказать, что в любой группе подгруппа индекса 2 обязательно нормальна.

(13) Перечислить все группы порядка $\leqslant 6$ с точностью до изоморфизма.

(14) Доказать, что если произведение двух любых левых смежных классов группы G по подгруппе H снова является левым смежным классом, то H — нормальная подгруппа в G.

(15) Пусть p — наименьшее простое число, делящее порядок конечной группы G, $H \subset G$ — подгруппа индекса p. Доказать, что H — нормальная подгруппа в G.

(16) Доказать, что если A — циклическая группа порядка n и d — делитель n, то A содержит ровно одну подгруппу порядка d, причем эта подгруппа циклическая.

(17) Найти все подгруппы конечного индекса в группе
  (a) целых чисел по сложению;
  (b) рациональных чисел по сложению;
  (c) действительных чисел по сложению;
  (d) ненулевых рациональных чисел по умножению;
  (e) ненулевых действительных чисел по умножению.

(18) Всегда ли
  (a) инъективный гомоморфизм групп имеет левый обратный гомоморфизм?
  (b) сюръективный гомоморфизм групп имеет правый обратный гомоморфизм?

(19) Доказать, что
  (a) группа диэдра D_3 изоморфна симметрической группе S_3;
  (b) группа тетраэдра T изоморфна знакопеременной группе A_4;
  (c) группа куба C изоморфна симметрической группе S_4;
  (d) группа икосаэдра I изоморфна знакопеременной группе A_5.

(20) Доказать, что
  (a) симметрическая группа S_3 изоморфна группе, заданной образующими s_1, s_2 и соотношениями $s_1^2 = e, s_2^2 = e$, $(s_1 s_2)^3 = e$;
  (b) симметрическая группа S_4 изоморфна группе, заданной образующими s_1, s_2, s_3 и соотношениями $s_1^2 = e, s_2^2 = e, s_3^2 = e$, $(s_1 s_2)^3 = e$, $(s_1 s_3)^2 = e$, $(s_2 s_3)^3 = e$.

(21) Доказать, что в конечной абелевой группе порядка n для любого $d \mid n$ существует хотя бы одна подгруппа порядка d.

(22) Изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{72}$ и $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{48}$?

Арифметические линейные пространства и матрицы

(1) Вычислить
  (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$, $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n$;

(b) $2x^2 - 3x + x^0$, где $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) Вычислить $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$, где

(a) $x = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $x = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$;

(c) $x = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

(3) Найти: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}^{-1}$, $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$, $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}^{-1}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$.

(4) Доказать, что если $A^n = 0$ (т. е. матрица A нильпотентна), то матрицы $(E \pm A)$ обратимы.

(5) Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(6) Найти все квадратные матрицы размера $n \times n$, коммутирующие с любой матрицей того же размера.

(7) Обозначим символом $[A, B]$ коммутатор $AB - BA$. Доказать, что для любых квадратных матриц A, B, C выполняются равенства:

(a) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$;

(b) $[[A, B], C] = [A, [B, C]] + [B, [C, A]]$.

(8) (a) Пусть $A, B, \ldots, D_1$ — квадратные матрицы одного порядка. Выразить произведение матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$ через заданные матрицы.

(b) Придумать и доказать аналогичную формулу для прямоугольных матриц.

(9) В кольце $M_2(\mathbb{R})$ найти подкольцо, изоморфное полю комплексных чисел.

(10) В кольцах $M_2(\mathbb{C})$ и $M_4(\mathbb{R})$ найти подкольца, изоморфные телу кватернионов.

(11) Сколько элементов в группе $GL_2(\mathbb{F}_q)$?

(12) Сколько в пространстве $\mathbb{F}^n$

(a) элементов?

(b) одномерных линейных подпространств?

(c) двумерных линейных подпространств?

(13) Пусть E_{ij} — матрица из алгебры M_n, у которой элемент, стоящий на пересечении i-й строки с j-м столбцом, равен 1, остальные элементы равны нулю. Доказать, что матрицы $E_{12}, E_{23}, E_{21}, E_{32}$ составляют систему образующих в M_3. Обобщить этот факт для любого n.

(14) Вычислить определители:

(a)

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix};$$

(b)

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{2n-1} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix};$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix};$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix};$$

(e)

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix};$$

(f)

$$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix};$$

(g)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

(15) Пусть A — квадратная матрица, A^t — транспонированная к ней. Доказать, что $\det A^t = \det A$.

Симметрические многочлены

(1) Найти сумму:
  (a) квадратов,
  (b) кубов,
  (c) обратных квадратов,
  (d) обратных кубов

  корней уравнения $x^3 - x + 1 = 0$.

(2) Составить уравнение, корнями которого являются квадраты корней уравнения $x^4 + 2x^3 - x + 3 = 0$.

(3) Обозначим через $\psi_k(x_1, \ldots, x_n)$ многочлен $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k$. Выразить ψ_2 и ψ_3 через элементарные симметрические функции.

(4) Производящей функцией для последовательности $a_0, a_1, \ldots$ элементов некоторого кольца A называется формальный степенной ряд $\sum a_k t^k \in A[[t]]$. Доказать, что $\Sigma(t) = \prod\limits_{i=1}^{n}(1 + x_i t)$ — производящая функция для последовательности (σ_k) элементарных симметрических функций.

(5) Полная симметрическая функция $h_k(x_1, \ldots, x_n)$ — это сумма всех мономов степени k от $x_1, \ldots, x_n$.
  (a) Сколько всего мономов в h_k?
  (b) Доказать, что производящая функция для (h_k) имеет вид $H(t) = \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - x_i t)^{-1}$.

(6) Доказать, что $\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k \sigma_k h_{m-k} = 0$. Выразить $h_3(x_1, x_2, x_3)$ через элементарные симметрические функции, а $\sigma_3(x_1, x_2, x_3)$ — через полные симметрические функции.

(7) Степенные суммы $\psi_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k$ всегда рассматривают с $k \geqslant 1$ и производящей суммой для них считают $\Psi(t) = \sum\limits_{k \geqslant 1} \psi_k t^k$. Доказать, что
  (a)
$$\Psi(t) = \frac{d}{dt} \ln H(t), \qquad \Psi(-t) = \frac{d}{dt} \ln \Sigma(t);$$
  (b)
$$m h_m = \sum_{k=1}^{m} \psi_k h_{m-k}, \qquad m\sigma_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \psi_k \sigma_{m-k}.$$

(8) Доказать, что результант многочленов $f(x)$ степени m и $g(x)$ степени n равен определителю, составленному из коэффициентов остатков при делении $g(x), xg(x), \ldots, x^{m-1}g(x)$ на $f(x)$. Предполагается, что остатки расположены в порядке возрастания степеней x.