Независимый Московский Университет
Математический колледж

Г. Л. Рыбников

Линейная алгебра

Первый курс, весенний семестр 1995/96 г.

Лекции 1–4

Москва
1996

1. Векторные пространства и линейные отображения

Пусть $\Bbbk$ — поле.

Определение 1. *Линейным (векторным) пространством* над полем $\Bbbk$ называется множество V, в котором определены операции сложения и умножения на элементы поля $\Bbbk$ таким образом, что $\forall a, b \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \Bbbk$:

1) V — абелева группа по сложению;
2) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$;
3) $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$;
4) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$;
5) $1 \cdot a = a$.

Элементы векторного пространства называются *векторами.*

Определение 2. *Линейным отображением* векторных пространств V и U, или *оператором* из V в U, называется отображение $\varphi : V \to U$, обладающее следующими свойствами:

1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;
2) $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(b)$.

Линейное отображение называется *изоморфизмом*, если оно биективно. Пространства V и U называются *изоморфными*, если существует изоморфизм из V в U.

Определение 3. Система векторов $\{v_1, \ldots, v_n\}$ называется *линейно зависимой*, если существуют $\{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$, не все равные нулю, такие что $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$. В противном случае система называется *линейно независимой.*

Легко видеть, что линейная зависимость сохраняется при изоморфизме.

Определение 4. Подмножество W векторного пространства V называется *подпространством* пространства W, если оно замкнуто относительно сложения и умножения на элементы поля $\Bbbk$.

Пример 5. *Пусть $\varphi : V \to U$ — линейное отображение. Ясно, что его ядро $\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$ и образ $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(V)$ являются подпространствами соответственно пространств V и U.*

Пусть $v_1, \ldots, v_k \in V$.

Определение 6. *Линейной оболочкой* $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ называется минимальное по включению подпространство векторного пространства V, содержащее $v_1, \ldots, v_k$.

Определение 7. *Линейной оболочкой* $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ называется множество всех векторов из V, которые можно представить в виде линейной комбинации $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — произвольные элементы поля $\Bbbk$.

Упражнение 8. Доказать, что два определения линейной оболочки эквивалентны.

Определение 9. Векторное пространство V называется *конечномерным*, если оно является линейной оболочкой конечного множества векторов. В противном случае пространство V называется *бесконечномерным*.

Определение 10. *Базисом* пространства V называется максимальное линейно независимое семейство векторов пространства V.

Упражнение 11. Доказать, что семейство (v_i) является базисом векторного пространства V тогда и только тогда, когда любой элемент $v \in V$ единственным образом выражается в виде линейной комбинации $\sum \lambda_i v_i$.

Определение 12. *Размерностью* конечномерного пространства называется число векторов его базиса.

Упражнение 13. Проверить корректность этого определения.

Упражнение 14. Пусть $v_1, \dots, v_k \in V$ и векторы $v_1, \dots, v_m$ для некоторого $m \geqslant 0$ линейно независимы. Доказать, что семейство векторов $(v_1, \dots, v_m)$ можно дополнить до базиса пространства $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ некоторыми векторами вида v_i (где, разумеется, $i > m$). Другими словами, существуют $i_1, \dots, i_s$ (где $s \geqslant 0$ и $m < i_1 < \dots < i_s$) такие, что $(v_1, \dots, v_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_s})$ — базис линейной оболочки $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Утверждение 15. *Столбцы матрицы $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда у нее найдется ненулевой минор порядка n.*

Доказательство. Столбцы матрицы B линейно независимы тогда и только тогда, когда линейно независимы соответствующие грассмановы полиномы

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\xi_i \in \Lambda^1(\xi_1, \dots, \xi_m).$$

С другой стороны, у матрицы B найдется ненулевой минор порядка n тогда и только тогда, когда $\bigwedge\limits_{j=1}^{n} \beta_j \neq 0$. Осталось доказать, что β_j линейно независимы тогда и только тогда, когда $\bigwedge\limits_{j=1}^{n} \beta_j \neq 0$.

Пусть набор $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ линейно независим. Дополним его до базиса $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ пространства Λ^1. Поскольку $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ — тоже базис Λ^1, то существуют $m \times m$ матрицы $C = (c_{ij})$ и $D = (d_{ij})$ такие, что $\beta_i = \sum c_{ij}\xi_j$ и $\xi_i = \sum d_{ij}\beta_j$ (первые n столбцов матрицы C^t образуют матрицу B). При доказательстве того, что любые два базиса линейного пространства имеют одно и то же число элементов, мы уже проверяли, что $CD = DC = E$, то есть матрица C обратима. Поэтому $\det C \neq 0$ и

$$(\bigwedge_{i=1}^{n} \beta_i) \wedge (\bigwedge_{i=n+1}^{m} \beta_i) = (\det C) \bigwedge_{i=1}^{m} \xi_i \neq 0.$$

Следовательно, $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \beta_i \neq 0$.

Пусть теперь семейство (β_i) линейно зависимо. Тогда некоторый элемент этого семейства линейно выражается через остальные: $\beta_k = \sum\limits_{i \neq k} a_i \beta_i$. Подставив это выражение вместо β_k в $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \beta_i$ и воспользовавшись дистрибутивностью, мы получим линейную комбинацию мономов от β_i, в каждом из которых есть повторяющиеся сомножители. Все такие мономы равны нулю, поэтому $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 0$. □

Определение 16. *Рангом* семейства $(v_1, \ldots, v_k)$ элементов линейного пространства V называется размерность линейной оболочки этого семейства. *Рангом матрицы* $A \in M_{m \times n}$ называется ранг семейства столбцов этой матрицы (как элементов $\Bbbk^m$).

Упражнение 17. Доказать, что ранг семейства $(v_1, \ldots, v_k)$ равен максимальному числу линейно независимых элементов этого семейства.

Теорема 18 (о ранге матрицы). *Ранг матрицы A равен максимальному порядку ненулевого минора этой матрицы и равен рангу матрицы A^t, то есть максимальному числу линейно независимых строк матрицы A.*

Доказательство. Непосредственно следует из утверждения 15. □

2. Простейшие классификационные теоремы

Основная задача линейной алгебры — задача классификации (с точностью до изоморфизма).

Теорема 19. *Любое конечномерное векторное пространство V над $\Bbbk$ изоморфно $\Bbbk^n$ для некоторого n.*

Доказательство этой теоремы мы оставляем в качестве несложного упражнения. Из этой теоремы следует, что размерность является единственным инвариантом конечномерных векторных пространств.

Будем рассматривать пары (U, V), где $U \subseteq V$. Назовем две пары $(U_1, V_1) \simeq (U_2, V_2)$ *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi : \ V_1 \to V_2$, такой что $\varphi(U_1) = U_2$.

Пусть $(u_1, \ldots, u_k)$ — базис U. Дополним его до базиса пространства V векторами $v_1, \ldots, v_l$. Пусть $n = \dim V = k + l$ и $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис $\Bbbk^n$.

Тогда $\Bbbk^k$ — линейная оболочка первых k элементов этого базиса. Легко видеть, что $(\Bbbk^k, \Bbbk^n) \simeq (U, V)$:

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} u_i, & i \leqslant k \\ v_{i-k}, & i > k. \end{cases}$$

Получилась

Теорема 20. *Любая пара (U, V), где V — конечномерное векторное пространство над $\Bbbk$, а $U \subseteq V$ — его подпространство, изоморфна паре вида $(\Bbbk^k, \Bbbk^n)$ для некоторых n и $k \leqslant n$.*

Пусть U и W — подпространства конечномерного векторного пространства V. Изоморфизмы троек (U, W, V) определяются аналогично тому, как определялись изоморфизмы пар (U, V).

Рассмотрим подпространство $U \cap W = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, где $v_1, \ldots, v_k$ — его базис. Дополним его до базисов подпространств U и W векторами $v_{k+1}, \ldots, v_l$ и $v_{l+1}, \ldots, v_m$ соответственно. Пусть векторы линейно зависимы, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha^i v_i = 0$, где α^i не все равны нулю. Тогда, очевидно,

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha^i v_i + \sum_{i=k+1}^{l} \alpha^i v_i = -\sum_{i=l+1}^{m} \alpha^i v_i.$$

Вектор, стоящий в левой части равенства, лежит в U, а вектор, стоящий в правой части, — в W, а, значит, он принадлежит их пересечению. Следовательно, $\sum\limits_{i=l+1}^{m} \alpha^i v_i = \sum\limits_{j=1}^{k} \beta^j v_j$, а значит, $\alpha^i = 0 \quad \forall i \in \{l+1, \ldots, m\}$. Поэтому $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha^i v_i + \sum\limits_{i=k+1}^{l} \alpha^i v_i = 0$, и $\alpha^i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, l\}$ (так как $v_1, \ldots, v_l$ — базис U). Итак, $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, то есть для любых двух подпространств конечномерного векторного пространства можно выбрать базис, согласованный с этой парой подпространств.

Сформулируем соответствующую классификационную теорему (несколько в ином стиле, чем две предыдущие).

Теорема 21. *Конечномерное пространство V и два его подпространства U и W определяются однозначно (с точностью до изоморфизма) следующими четырьмя инвариантами: $k = \dim V$, $l = \dim U$, $m = \dim W$ и $n = \dim(U \cap W)$, которые могут принимать любые неотрицательные целые значения, удовлетворяющие неравенствам $n \leqslant m \leqslant k$ и $n \leqslant l \leqslant k$.*

Пусть в пространствах V и W выбраны базисы $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ и $(w_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ соответственно. Поставим в соответствие каждому линейному отображению $\varphi : V \to W$ матрицу, у которой в i-ом столбце стоят координаты вектора $\varphi(v_i)$ в базисе (w_j).

Упражнение 22. Доказать, что таким образом задается изоморфизм пространства $\mathrm{Hom}(V, W)$ линейных отображений из V в W и пространства $M_{m\times n}(\Bbbk)$ матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из поля $\Bbbk$. Кроме того, если еще в пространстве U выбран базис $(u_1, \dots, u_k)$, то для любых линейных отображений $\varphi : V \to W$ и $\psi : U \to V$ с матрицами соответственно A и B, композиции отображений $\varphi \circ \psi$ отвечает матрица AB.

Пусть $\varphi_1 : V_1 \to W_1$ и $\varphi_2 : V_2 \to W_2$ — линейные отображения. Мы будем называть их изоморфными, если существуют такие изоморфизмы $\mu : V_1 \to V_2$ и $\psi : W_1 \to W_2$, что $\varphi_2 \circ \mu = \psi \circ \varphi_1$. Ясно, что линейные отображения изоморфны тогда и только тогда, когда при некотором выборе базисов они имеют одну и ту же матрицу.

Теорема 23. *Инварианты* $\dim V = m$, $\dim W = n$ *и* $\dim \varphi(V) = k$ *определяют линейное отображение* $\varphi : V \to W$ *однозначно (с точностью до изоморфизма).*

Доказательство. Будем искать базисы V и W, чтобы матрица отображения имела такой вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathrm{Ker}\,\varphi = \langle v_{k+1}, \dots, v_m \rangle$ (базис). Дополним его до базиса V векторами $v_1, \dots, v_k$. Ясно, что векторы $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)$ порождают пространство $\mathrm{Im}\,\varphi$. Докажем, что они линейно независимы.

Пусть есть линейная зависимость

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(v_i) = 0.$$

Тогда

$$\varphi\Big(\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i v_i\Big) = 0,$$

то есть

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \in \mathrm{Ker}\,\varphi.$$

Следовательно, найдутся такие $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \Bbbk$, что

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i = 0.$$

Однако $(v_1, \ldots, v_n)$ — базис пространства V, а значит все λ_i равны нулю. Поэтому $w_i = \varphi(v_i) \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$ составляют базис пространства $\varphi(V)$.

Дополним его до базиса $(w_1, \ldots, w_n)$ пространства W. В этих базисах наше линейное отображение записывается матрицей требуемого вида. $\square$

Следствие 24. *Пусть $\varphi : V \to W$ — линейное отображение. Тогда $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim V$.*

Пусть W — подпространство векторного пространства V. Если рассматривать V и W как группы по сложению, то можно определить факторгруппу V/W. На ней очевидным образом вводится структура векторного пространства над полем $\Bbbk$ (а именно, по определению полагаем $\lambda(v + W) = \lambda v + W$ для любого $\lambda \in \Bbbk$ и любого смежного класса $v + W \in V/W$). Мы будем называть V/W *факторпространством* векторного пространства V по подпространству W.

Рассмотрим каноническую проекцию $\pi : V \to V/W$. Ясно, что это линейное отображение сюръективно, и что $\operatorname{Ker}\pi = W$. Поэтому $\dim W + \dim(V/W) = \dim V$.

3. Двойственное линейное пространство

Подпространство линейного пространства V можно задавать как линейную оболочку некоторого семейства элементов пространства V. Очевидно, что любое подпространство конечномерного линейного пространства можно получить как линейную оболочку конечного семейства векторов (кстати, почему это очевидно?).

С другой стороны, подпространства можно задавать линейными уравнениями.

Определение 25. *Линейной функцией* на линейном пространстве V называется любое линейное отображение $\xi : V \to \Bbbk$. Множество V^* всех линейных функций на V обладает естественной структурой линейного пространства. Это пространство называется *двойственным* к V.

Утверждение 26. *Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем $\Bbbk$. Тогда двойственное пространство V^* тоже конечномерно, и $\dim V^* = \dim V$.*

Доказательство. Пусть $\dim V = n$ и $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис пространства V. Определим линейные функции $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in V^*$ как координатные функции относительно базиса $(e_1, \ldots, e_n)$, то есть для любого вектора $v = \sum x_i e_i$ мы положим $\varepsilon_j(v) = x_j$. Поскольку разложение вектора по базису определено однозначно, то функции $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ определены корректно; линейность их также не вызывает сомнений. Докажем, что $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — базис пространства V^*.

Очевидно, что функции $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ являются линейно независимыми. С другой стороны, по определению линейности, для любой функции $\xi \in V^*$

имеет место равенство: $\xi(\sum x_i e_i) = \sum x_i \xi(e_i)$, то есть $\xi = \sum \xi(e_i)\varepsilon_i$. Поэтому $V^* = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \rangle$. Итак, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ — базис пространства V^*, и $\dim V^* = \dim V$. $\square$

Базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ называется *двойственным* к базису $(e_1, \dots, e_n)$. Отметим, что он однозначно определяется условием $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$.

Любой вектор $v \in V$ определяет линейную функцию $\xi \mapsto \xi(v)$ на пространстве V^*, то есть элемент дважды двойственного пространства $(V^*)^*$. Легко видеть, что при $\dim V < \infty$ мы получаем канонический (то есть не зависящий от выбора базиса) изоморфизм $V \to (V^*)^*$. Впредь мы будем отождествлять любое конечномерное пространство с дважды двойственным к нему.

Казалось бы, ничто не мешает отождествить пространство V и с V^* с помощью изоморфизма, переводящего базис (e_i) в базис (ε_i). Однако этот изоморфизм зависит от выбора базиса (e_i).

Действительно, пусть (e'_i) — другой базис пространства V. Рассмотрим матрицу $A \in M_{n\times n}$, j-тый столбец которой составляют координаты вектора e'_j в базисе (e_i) $(j = 1, \dots, n)$. Эта матрица называется *матрицей перехода* от базиса (e_i) к базису (e'_i). Пусть e — строка $(e_1, \dots, e_n)$, а e' — строка $(e'_1, \dots, e'_n)$. Имеет место следующее матричное равенство: $e' = eA$ (по определению матрицы A).

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — строка координат вектора $v \in V$ в базисе v, а $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ — строка координат того же вектора в базисе v'. Положим $X = x^t$ и $X' = (x')^t$ — те же координаты, записанные в столбец. Тогда $v = eX = e'X'$. Отсюда $X = AX'$. Транспонируя, получаем $x = x'A^t$, или $x' = x(A^t)^{-1}$. Последнее равенство, верное для любого вектора $v \in V$, мы можем интерпретировать как правило пересчета координатных функций, связанных с базисом e, в координатные функции, связанные с базисом e'. Другими словами, имеет место матричное рвенство $\varepsilon' = \varepsilon(A^t)^{-1}$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ — базис V^*, двойственный к базису e, а $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ — базис V^*, двойственный к базису e'. Итак, матрицей перехода от базиса ε к базису ε' является $(A^t)^{-1}$. Таким образом, наше отождествление V с V^* выдерживает не все замены базиса, а лишь те, для которых $A = (A^t)^{-1}$. Такие матрицы называются ортогональными. К ним мы ещё вернемся.

Пусть задано линейное отображение (оператор) $F : V \to W$. По любой функции $\xi : W \to \mathbb{k}$ мы можем построить функцию на $F^*\xi : W \to \mathbb{k}$, положив $F^*\xi(v) = \xi(Fv)$. Ясно, что если ξ — линейная функция, то и $F^*\xi$ — линейная функция, и что отображение $F^* : W^* \to V^*$ является линейным. Оно называется *сопряженным линейным отображением* (или *сопряженным оператором*) к F.

Легко проверить, что для любого оператора $F : V \to W$ выполнено равенство $F^{**} = F$ (напомню, что мы рассматриваем только конечномерные векторные пространства и отождествляем каждое пространство с дважды двойственным к нему).

Упражнение 27. Доказать, что

1) если $F : V \to W$ — изоморфизм векторных пространств, то $F^* : W^* \to V^*$ — тоже изоморфизм;

2) если $G : U \to V$ и $F : V \to W$ — произвольные линейные отображения, то $(FG)^* = F^* G^*$.

Определение 28. Пусть V — векторное пространство над полем $\Bbbk$. *Аннулятором* подпространства $U \subseteq V$ называется подпространство $U^\circ \subseteq V^*$, состоящее из всех линейных функций на V, обращающихся тождественно в нуль на подпространстве U.

То, что мы отождествили V^{**} с V, позволяет нам рассматривать аннулятор любого подпространства $W \subseteq V^*$ как подпространство пространства V.

Утверждение 29. *Для любого подпространства $U \subseteq V$ выполнено равенство $U^{\circ\circ} = U$.*

Доказательство. Воспользуемся классификацией подпространств (теорема 20). Выберем в V базис $(v_1, \ldots, v_n)$, согласованный с подпространством U (то есть такой, что $U = \langle v_1, \ldots v_k \rangle$). Пусть $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ — двойственный базис пространства V^*. Тогда, очевидно, $U^\circ = \langle v_{k+1}^*, \ldots, v_n^* \rangle$ и $U^{\circ\circ} = \langle v_1, \ldots v_k \rangle = U$. ☐

Аналогично, с использованием классификации линейных отображений, доказывается

Утверждение 30. *Для любого линейного отображения $F : V \to W$ выполнены равенства:*

$$(\operatorname{Ker} F)^\circ = \operatorname{Im} F^* \qquad \textit{и} \qquad (\operatorname{Im} F)^\circ = \operatorname{Ker} F^*.$$

Утверждение 29 означает, по существу, что любое подпространство U пространства V можно задать системой линейных уравнений на координаты вектора (эти уравнения соответствуют элементам пространства U°). Более того, достаточно взять $\dim U^\circ$ уравнений, отвечающих элементам произвольного базиса этого пространства. Число $\dim U^\circ = \dim V - \dim U$ называется *коразмерностью* подпространства U в пространстве V и обозначается $\operatorname{codim} U$.

4. Аффинное пространство

Определение 31. Множество S называется аффинным пространством, ассоциированным с векторным пространством V, если на нем задана операция $S \times V \xrightarrow{+} S$, обладающая следующими свойствами ($s, p \in S, \quad x, y \in V$:

1) $(s + x) + y = s + (x + y)$;

2) $s + 0 = s$;

3) $\forall s, p \quad \exists! \quad x: \quad s = p + x$.

Свойства 1) и 2) означают, что задано действие абелевой группы на множестве S, а свойство 3) означает, что это действие точно транзитивно (у него одна орбита, любая точка переводится в любую другую единственным образом).

Выбирая начало системы координат, мы устанавливаем биекцию с V. Если $O \in S$, а $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, то $Oe_1 \ldots e_n$ называется *репером.*

Пусть $s_0, s_1, \ldots, s_k$ — точки аффинного пространства S, $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^k \in \mathbb{k}$. Тогда линейная комбинация $\sum_{i=0}^k \alpha^i s_i$ может в некоторых случаях иметь смысл. Если $\sum_{i=0}^k \alpha^i = 0$, то $\sum_{i=0}^k \alpha^i s_i = \sum_{i=0}^k \alpha^i (s_i - s_0) \in V$. Далее, если $\sum_{i=0}^k \alpha^i = 1$, то $\sum_{i=0}^k \alpha^i s_i = s_0 + \sum_{i=0}^k \alpha^i (s_i - s_0) \in S$.

Упражнение 32. Доказать, что от выбора точки s_0 ничего не зависит.

Определение 33. *Барицентрической комбинацией* точек $s_0, \ldots, s_k$ называется такая линейная комбинация $\sum_{i=0}^k \alpha^i s_i$, что $\sum_{i=0}^k \alpha^i = 1$.

Пусть S — аффинное пространство и $M \subset S$. Тогда

Определение 34. *Аффинной оболочкой* множества M называется множество $\operatorname{aff} M = \{\sum \alpha^i m_i | \sum \alpha^i = 1, \quad m_i \in M\}$.

$\operatorname{aff} M$ является аффинным подпространством: выбираем точку и сдвигаем ее на минимальное по включению аффинное подпространство (сдвигаем на все разности, следовательно получаются все барицентрические комбинации).

Определение 35. $n + 1$ точка $(\dim V = n)$ с линейно независимыми разностями $s_i - s_0$, называется *базисным симплексом.* Координаты точки в разложении по базисному симплексу называются *барицентрическими.*

Определение 36. Аффинные пространства *параллельны*, если соответствующие им векторные пространства вложены одно в другое.
Аффинные пространства S_1 и S_2, ассоциированные с линейными пространствами U_1 и U_2 соответственно, *скрещиваются*, если $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ и $U_1 \cap U_2 = 0$.

5. Выпуклость

Пусть (A, V) — аффинное пространство (над $\mathbb{R}$ или любым другим упорядоченным полем). *Отрезком*, соединяющим точки x и y является множество $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda) y | \lambda \in [0, 1]\}$.

Определение 37. Барицентрическая комбинация $\sum_{i=1}^n x_i \lambda_i$ называется *выпуклой комбинацией* точек $x_1, \ldots, x_n$, если $\lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$.

Определение 38. *Выпуклой оболочкой* $\operatorname{conv} M$ называется

(1) множество всех выпуклых комбинаций элементов из M;

(2) минимальное по включению выпуклое множество, содержащее M.

Упражнение 39. Докажите эквивалентность двух определений выпуклой оболочки.

6. Свойства выпуклых множеств

Теорема 40 (Каратеодори). *Для каждого подмножества M вещественного аффинного пространства S его выпуклая оболочка $\operatorname{conv} M$ совпадает с множеством всех тех выпуклых комбинаций*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i s_i \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1),$$

где $s_1, \ldots, s_k \in M$ и $k \leqslant \dim S + 1$.

Доказательство. Пусть $s \in \operatorname{conv} M$. Тогда найдутся такие точки $s_1, \ldots, s_n \in M$ и положительные числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$, в сумме равные единице, что $s = \sum_{i=1}^{n} \mu_i s_i$. Докажем, что если $n > \dim S + 1$, то s лежит в выпуклой оболочке не более чем $n-1$ из точек $s_1, \ldots, s_n$. Действительно, точки $s_1, \ldots, s_n$ аффинно-зависимы, то есть существуют $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{R}$, не все равные нулю и такие, что $\sum_{i=1}^{n} \nu_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \nu_i s_i = 0$. Положим $\varkappa = \min\limits_{\nu_i > 0}(\mu_i / \nu_i)$ и $\mu'_j = \mu_j - \varkappa \nu_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Числа μ'_i все неотрицательны, в сумме равны единице, и хотя бы одно из них равно нулю. □

Теорема 41 (Радона). *Пусть $(s_1, \ldots, s_n)$ — семейство точек d-мерного вещественного аффинного пространства S, причем $n \geqslant d+2$. Тогда найдется такое множество индексов $I \subset \{1, \ldots, n\}$, что*

$$\operatorname{conv}\{s_i \mid i \in I\} \cap \operatorname{conv}\{s_j \mid j \in \{1, \ldots, n\} \setminus I\} \neq \varnothing.$$

Доказательство. Точки $s_1, \ldots, s_n$ аффинно-зависимы, то есть существуют $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{R}$, не все равные нулю и такие, что $\sum_{i=1}^{n} \nu_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \nu_i s_i = 0$. Положим $I = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid s_i > 0\}$, $J = \{1, \ldots, n\} \setminus I$. Тогда

$$s = \frac{\sum\limits_{i \in I} \nu_i s_i}{\sum\limits_{i \in I} \nu_i} = \frac{\sum\limits_{j \in J} \nu_j s_j}{\sum\limits_{j \in J} \nu_j} \in \operatorname{conv}\{s_i \mid i \in I\} \cap \operatorname{conv}\{s_j \mid j \in J\} \neq \varnothing.$$

□

Теорема 42 (Хелли). *Пусть в d-мерном аффинном пространстве заданы выпуклые множества $C_1, \ldots, C_n$ $(n \geqslant d+1)$. Если любые $d+1$ из этих множеств имеют непустое пересечение, то все они имеют общую точку.*

Доказательство. Докажем с помощью индукции по m, что любые m из множеств C_i имеют непустое пересечение. При $m = d+1$ это условие теоремы. Пусть $m > d+1$ и любые $m-1$ из множеств C_i имеют непустое пересечение. Докажем, например, что $\bigcap\limits_{i=1}^{m} C_i \neq \varnothing$. Выберем для каждого $i = 1, \ldots, m$ точку $s_i \in \bigcap\limits_{j \neq i} C_j \neq \varnothing$. По теореме Радона найдутся множества индексов $I \subset \{1, \ldots, m\}$ и $J = \{1, \ldots, m\} \setminus I$ такие, что $\operatorname{conv}\{s_i \mid i \in I\} \cap \operatorname{conv}\{s_j \mid j \in J\} \neq \varnothing$. Однако $\operatorname{conv}\{s_i \mid i \in I\} \subseteq \bigcap\limits_{j \in J} C_j$ и $\operatorname{conv}\{s_j \mid j \in J\} \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} C_i$. Поэтому $\bigcap\limits_{i=1}^{m} C_i \neq \varnothing$. □

7. Выпуклые многогранные конусы

Лемма 43 (Фаркаша). *Пусть в конечномерном линейном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ заданы векторы $v_1, \ldots, v_n$. Тогда для любого $v \in V$ выполнено одно из двух:*

1) *Существуют неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что $v = \sum \lambda_i v_i$.*

2) *Существует линейная функция $\varphi \in V^*$ такая, что $\varphi(v) = -1$ и $\varphi(v_i) \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Обозначим элементы стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ через $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Пусть $F : \mathbb{R}^{n+1} \to V$ — линейное отображение, переводящее e_0 в $-v$, а e_i в v_i при $i = 1, \ldots, n$. В координатах отображение F записывается так: $F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i - x_0 v_0$.

Пусть $L = \operatorname{Ker} F$. Тогда равенство $v = \sum \lambda_i v_i$ эквивалентно тому, что $(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in L$. С другой стороны, $L^{\perp} = F^*(V^*)$, причем, по определению сопряженного линейного отображения, координаты $F^*(\varphi)$ в базисе $e_0^*, e_1^*, \ldots, e_n^*$ равны $(-\varphi(v), \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$. Далее мы будем отождествлять пространство, двойственное $\mathbb{R}^{n+1}$, с $\mathbb{R}^{n+1}$, отождествляя e_i с e_i^*.

Легко видеть, что утверждение леммы Фаркаша можно переформулировать следующим образом.

Для любого подпространства $L \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ выполнено одно из двух:

1) В L найдется вектор $(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ с $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

2) В $L^{\perp}$ найдется вектор $(1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ с $\varepsilon_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Докажем это.

Воспользуемся индукцией по n. При $n = 0$ доказывать нечего. Пусть $n > 0$. Положим

$$L/n = \{(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid (x_0, \ldots, x_{n-1}, 0) \in L\}$$

и

$$L\backslash n = \{(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid (x_0, \ldots, x_{n-1}, x) \in L \text{ для некоторого } x \in \mathbb{R}\}.$$

Упражнение 44. Доказать, что $(L\backslash n)^\perp = L^\perp/n$ и $(L/n)^\perp = L^\perp\backslash n$.

Согласно предположению индукции в каждой паре пространств $(L\backslash n, L^\perp/n)$ и $(L/n, L^\perp\backslash n)$ одно содержит вектор вида $(1, a_1, \ldots, a_{n-1})$ с неотрицательными координатами. Если такой вектор есть в L/n или в $L^\perp/n$, то все очевидно. В противном случае, существуют векторы $(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \in L$ и $(1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n) \in L^\perp$ такие, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ неотрицательны. Однако, по определению аннулятора, $1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i = 0$, следовательно, $\lambda_n \varepsilon_n < 0$, то есть либо $\lambda_n > 0$, либо $\varepsilon_n > 0$. □

Пусть задано подпространство L пространства $\Bbbk^n$. *Носителем* вектора $v = (x_1, \ldots, x_n) \in L$ называется множество $\operatorname{supp} v = \{i \mid x_i \neq 0\}$. Вектор $v \in L$ называется *элементарным*, если его носитель непуст и минимален (по включению) среди непустых носителей векторов из L. Из этого определения следует, что элементарный вектор определяется своим носителем с точностью до умножения на ненулевой элемент поля. Легко видеть, что любой ненулевой вектор $v \in L$ можно представить как сумму элементарных с носителями, лежащими в $\operatorname{supp} v$. Для $\Bbbk = \mathbb{R}$ (и вообще для любого упорядоченного поля $\Bbbk$) имеет место следующее полезное уточнение этого факта:

Теорема 45 (Рокафеллара). *Пусть все координаты ненулевого вектора $v \in L \subseteq \mathbb{R}^n$ неотрицательны. Тогда его можно представить в виде суммы элементарных векторов с неотрицательными координатами.*

Доказательство. Мы воспользуемся индукцией по числу элементов в носителе вектора $v = (x_1, \ldots, x_n)$. Если вектор v является элементарным, то доказывать нечего. Допустим теперь, что v не является элементарным, и что теорема верна для всех векторов, носители которых строго содержатся в $\operatorname{supp} v$. Докажем прежде всего, что найдется элементарный вектор с неотрицательными координатами, носитель которого принадлежит $\operatorname{supp} v$.

Пусть $w = (y_1, \ldots, y_n)$ — произвольный элементарный вектор, для которого $\operatorname{supp} w \subset \operatorname{supp} v$. Положим $\varkappa = \min\limits_{y_i > 0} x_i/y_i$. Тогда $v' = v - \varkappa w \in L$ — вектор с неотрицательными координатами, носитель которого строго содержится в носителе v. Согласно предположению индукции, его можно представить как сумму элементарных векторов с неотрицательными координатами. Очевидно, что носитель каждого из этих элементарных векторов содержится в носителе v.

Выберем теперь в качестве w элементарный вектор с неотрицательными координатами. Повторив рассуждения из предыдущего абзаца, мы получим, что $v = \varkappa w + v'$. По предположению индукции, v' можно представить как сумму элементарных векторов с неотрицательными координатами. Следовательно, это можно сделать и для v. □

Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. *Конической оболочкой* векторов $v_1, \ldots, v_n \in V$ называется множество $\{\sum \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, n)\}$. Коническая оболочка обозначается $\operatorname{cone}(v_1, \ldots, v_n)$.

Теорема 46. *Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$. Тогда множество $K = \{v \in V \mid \varphi_i(v) \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, n)\}$ является конической оболочкой конечного множества векторов.*

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $F : \mathbb{R}^n \to V^*$, переводящее i-тый базисный вектор пространства $\mathbb{R}^n$ в φ_i. Пусть $W = F^*(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ (как и прежде, мы отождествляем пространство $\mathbb{R}^n$ с двойственным к нему).

Так как элементарный вектор определяется своим носителем однозначно с точностью до пропорциональности, мы можем выбрать конечное множество $\{w_1, \ldots, w_k\}$ элементарных векторов в W с неотрицательными координатами так, что любой элементарный вектор с неотрицательными координатами пропорционален одному из них. По теореме Рокафеллара отсюда следует, что множество $\bar{K}$ всех векторов из L с неотрицательными координатами является конической оболочкой векторов $w_1, \ldots, w_k$.

Отметим, что интересующее нас множество K является прообразом множества $\bar{K}$ при отображении F^*. Выберем векторы $v_1, \ldots, v_k$ так, что $F^*(v_i) = w_i \ (i = 1, \ldots, k)$. Пусть $U = \operatorname{Ker} F^*$ и $(u_1, \ldots, u_m)$ — некоторый базис U. Положим $v_{k+i} = u_i \ (i = 1, \ldots, m)$ и $v_{k+m+1} = -\sum_{i=1}^m u_i$. Тогда K является конической оболочкой векторов $v_1, \ldots, v_{k+m+1}$. □

Рассмотрим теперь коническую оболочку K произвольного семейства $v_1, \ldots, v_k$ элементов конечномерного линейного пространства V над $\mathbb{R}$. Обозначим через K^* множество всех линейных функций из V^*, которые не принимают на K отрицательных значений. Очевидно, что $\varphi \in K^*$ в том и только в том случае, если $\varphi(v_i) \geqslant 0$ для любого $i = 1, \ldots, k$. Согласно теореме 46 множество K^* является конической оболочкой некоторого конечного множества $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, а по лемме Фаркаша $(K^*)^* = K$ (мы отождествляем $(V^*)^*$ с V). Отсюда сразу следует, что $K = \{v \in V \mid \varphi_i(v) \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, m)\}$.

Назовем любое подмножество вещественного линейного пространства V вида $\operatorname{cone}(v_1, \ldots, v_k)$ *выпуклым многогранным конусом*. Мы показали, что любому выпуклому многогранному конусу K отвечает *двойственный конус* K^*, причем дважды двойственный конус совпадает с исходным. Отсюда, в частности, следует, что любой выпуклый многогранный конус может быть задан как множество решений конечной системы нестрогих линейных неравенств.

Назовем *гранью* выпуклого многогранного конуса $K = \{v \in V \mid \varphi_i(v) \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, m)\}$ любое множество вида

$$\Gamma = \{v \in V \mid \varphi_i(v) = 0 \ (i \in I); \ \varphi_i(v) \geqslant 0 \ (i \in \{1, \ldots, m\} \setminus I)\}$$

для некоторого $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Размерностью $\dim \Gamma$ грани Γ называется размерность ее линейной оболочки.

Упражнение 47. Доказать, что определение грани корректно, то есть не зависит от выбора набора функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, задающих конус K.

Пусть Γ — грань конуса K. Положим $\Gamma^* = \{\varphi \in K^* \mid \varphi(v) = 0$ для любого $v \in \Gamma\}$.

Упражнение 48. Доказать, что Γ^* является гранью конуса K^*, причем $(\Gamma^*)^* = \Gamma$ и $\dim\Gamma + \dim\Gamma^* = \dim V$.

8. Выпуклые многогранники

Пусть (S, V) — d-мерное аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$. Обозначим через W пространство аффинно-линейных функций на S. Легко видеть, что $\dim W = d + 1$. Каждый элемент s аффинного пространства S задает линейную функцию на пространстве W: $f \mapsto f(s)$. Таким образом мы получаем вложение $S \hookrightarrow W^*$, то есть S можно рассматривать как аффинную гиперплоскость в W^*.

Итак, выпуклый многогранник (то есть множество решений конечной системы нестрогих аффинно-линейных неравенств) можно рассматривать как пересечение аффинной гиперплоскости S с некоторым выпуклым многогранным конусом. Пользуясь этим, легко вывести из доказанных выше теорем теорему Минковского-Вейля о том, что ограниченное множество является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда оно является выпуклой оболочкой конечного множества точек.

Понятие двойственности также переносится на многогранники (с некоторыми ограничениями). А именно, пусть $P \subseteq S$ — ограниченный многогранник, причем $\operatorname{aff} P = S$. Тогда P имеет внутренние точки. Пусть s_0 — внутренняя точка многогранника P. Рассмотрим в пространстве W аффинно-линейных функций на S аффинную гиперплоскость S^*, состоящую из функций, равных единице в точке s. Тогда $P^* = \{f \in S^* \mid f(s) \geqslant 0$ для любого $s \in P\}$ является ограниченным выпуклым многогранником в S^*. При этом функция f_0 на S, тождественно равная единице, является внутренней точкой многогранника P^*. Многогранник P^* называется двойственным многогранником к P относительно точки s_0. Многогранник P является двойственным многогранником к P^* относительно точки f_0.

Понятие граней и их двойственность легко переносятся с выпуклых многогранных конусов на выпуклые многогранники. Отметим, что, хотя двойственный многогранник зависит от выбора внутренней точки исходного многогранника, множество его граней, частично упорядоченное по включению, определяется однозначно (оно изоморфно «перевернутому» частично упорядоченному множеству граней исходного многогранника).

Упражнение 49. Восстановить доказательства сформулированных в последних четырех абзацах утверждений.