Задачи по алгебре. I курс, весна 1996 года.
Листок № 1.

1) Найти ранг системы столбцов матрицы, базис их линейной оболочки, задать ее уравнениями, найти базис аннулятора (в сопряженных координатах), задать его уравнениями:

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Пусть V — линейное пространство размерности n и $v_1, \ldots, v_{n+2} \in V$. Доказать, что существуют такие коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2}$, не все из которых равны нулю, что $\sum \alpha_i v_i = 0$ и $\sum \alpha_i = 0$.

3) Пусть $A \in M_{m\times n}$ и $B \in M_{k\times n}$ — такие матрицы, что для любого $X \in M_{n\times 1}$ если $AX = 0$, то и $BX = 0$. Доказать, что найдется матрица $C \in M_{k\times m}$ такая, что $B = CA$.

4) Найти базис пересечения линейных оболочек столбцов матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

5) Поставим в соответствие каждой матрице A из $M_{m\times n}$ следующую линейную функцию на пространстве $M_{n\times m}$: $\varphi_A(X) = rmtr(AX)$.

   а) Доказать, что таким образом устанавливается изоморфизм пространства $M_{m\times n}$ с пространством $M^*_{n\times m}$.

   б) Отождествим $M_{n\times n}$ с $M^*_{n\times n}$ с помощью этого изоморфизма. Чему равен аннулятор пространства матриц со следом 0?

6) Пусть V — линейное пространство, $E \subseteq V$ — конечное множество, порождающее V, $\mathcal{I}$ — множество линейно независимых подмножеств множества E, $\mathcal{B}$ — множество базисов пространства V, содержащихся в E, $\mathcal{C}$ — множество минимальных (по включению) линейно зависимых подмножеств множества E. Ранг множества $A \subseteq E$ в пространстве V будем обозначать через $r(A)$. Доказать следующие утверждения:

   а) Для любых $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ таких, что $|I_1| < |I_2|$, найдется $a \in I_2 \setminus I_1$ такой, что $(I_1 \cup \{a\}) \in \mathcal{I}$.

б) Для любых $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ и любого $b \in B_1 \setminus B_2$ найдется $b' \in B_2$ такой, что $(B_1 \setminus \{b\} \cup \{b'\}) \in \mathcal{B}$.

в) Для любых различных $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ и любого $a \in C_1 \cap C_2$ найдется $C_3 \in \mathcal{C}$ такой, что $C_3 \subseteq ((C_1 \cup C_2) \setminus \{a\})$.

г) Для любых $A, B \subseteq E$ выполнено неравенство $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$.

д)* Для любых $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ и элементов $a \in C_1 \cap C_2$ и $b \in C_1 \setminus C_2$ найдется $C_3 \in \mathcal{C}$ такой, что $b \in C_3 \subseteq ((C_1 \cup C_2) \setminus \{a\})$.