Задачи по алгебре. I курс, весна 1996 года.
Листок № 2.

1) Указать все случаи взаимного расположения двух двумерных плоскостей четырехмерного пространства, заданных уравнениями:

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,2) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=3,4),$$

и для каждого случая дать необходимое и достаточное условие в терминах ранга матриц.

2) Найти пересечение, аффинную оболочку объединения следующих плоскостей, а также их размерности:

$$\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3+3x_4=0 \\ \phantom{x_1+{}} 8x_2+2x_3+5x_4=1 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} -x_1+6x_2+3x_3+3x_4=2 \\ 2x_1-6x_2+3x_3-3x_4=-1. \end{cases}$$

3) Найти аффинный ранг системы точек (координаты заданы столбцами матрицы), аффинную оболочку (задать уравнениями), базисный симплекс, барицентрические координаты остальных точек:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

4) Найти прямую, проходящую через точку P и пересекающую плоскость S и прямую L

$$P=\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad S: \begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3=3 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=2, \end{cases} \quad L: \begin{pmatrix} 4+t \\ -2-t \\ 5+3t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

5) Найти число прямых, скрещивающихся с данной, в четырехмерном аффинном пространстве над полем $\mathbf{F}_p$.

6) Пусть S — аффинное пространство размерности n, ассоциированное с векторным пространством V над полем $\mathbf{k}$. Назовем функцию $f : S \to \mathbf{k}$ *аффинно-линейной*, если для любых двух точек $s_1, s_2 \in S$ выполнено равенство $f(s_1) - f(s_2) = Df(s_1 - s_2)$, где $Df \in V^*$. Доказать, что аффинно-линейные функции на S образуют векторное пространство. Чему равна его размерность?

7) Пусть S, T — аффинные пространства размерностей n и m, ассоциированные с векторными пространством V и W над полем $\mathbf{k}$. Назовем отображение $\varphi : S \to T$ *аффинным*, если для любых двух точек $s_1, s_2 \in S$ выполнено равенство $\varphi(s_1) - \varphi(s_2) = D\varphi(s_1 - s_2)$, где $D\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

   а) Доказать, что аффинные отображения из S в T образуют аффинное пространство. Чему равна его размерность? С каким векторным пространством оно ассоциированно?

   б) Классифицировать аффинные отображения с точностью до аффинного изоморфизма.