Задачи по алгебре. I курс, весна 1996 года.
Листок № 3.

1) Пусть M и N — выпуклые множества в аффинном пространстве (A, V). Доказать, что
   а) середины отрезков, соединяющих точки из M с точками из N, образуют выпуклое множество в пространстве A;
   б) векторы, соединяющие точки из M с точками из N, образуют выпуклое множество в пространстве V.
   в) $\operatorname{conv}(M \cup N)$ совпадает с объединением всех отрезков $[m, n]$, где $m \in M$ и $n \in N$.
2) Семейство $(a_1, \ldots, a_n)$ точек d-мерного вещественного аффинного пространства A называется *выпукло-независимым*, если ни одна из точек этого семейства не является выпуклой комбинацией остальных. Доказать, что если каждое подсемейство семейства $(a_1, \ldots, a_n)$, состоящее из $d+2$ точек, является выпукло-независимым, то и все семейство является выпукло-независимым.
3) Найти все элементарные векторы в пространстве $L \subseteq \mathbb{R}^4$ и в его ортогональном дополнении, где L — множество решений системы
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases}$$
4) Найти все грани выпуклого конуса в $\mathbb{R}^4$, натянутого на столбцы матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix},$$
   и двойственного ему конуса.
5) а) Чему равно максимальное число частей (выпуклых многогранников), на которые может разбиваться n-мерное вещественное аффинное пространство k гиперплоскостями?
   б) Доказать, что число частей максимально тогда и только тогда, когда пересечение любых m из заданных гиперплоскостей при $m \leqslant n$ является $(n-m)$-мерной плоскостью, а при $m = n+1$ пусто.
   в) Найти число ограниченных частей при условии, что число всех частей максимально.