Задачи по алгебре. I курс, весна 1996 года.
Листок № 4.

1) Найти вершины и описать форму многогранника P в трехмерном пространстве, заданного системой неравенств

$$x_1 \leqslant 1, \quad x_2 \leqslant 1, \quad x_3 \leqslant 1, \quad x_2+x_3 \geqslant -1, \quad x_1+x_3 \geqslant -1, \quad x_1+x_2 \geqslant -1.$$

2) Найти вершины и описать форму сечения четырехмерного куба, заданного неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1,2,3,4)$, плоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = t$ при $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 2\frac{1}{2}$.

3) Для каких t у сечения n-мерного куба $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ плоскостью $\sum x_i = t$ больше всего вершин? Сколько?

4) Для многогранника, заданного как выпуклая оболочка столбцов матрицы A, написать систему линейных неравенств, задающих многогранник, и найти все его трехмерные грани:

   а)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   б)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Найти все ребра многогранника, заданного как выпуклая оболочка столбцов матрицы A:

   а)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

   б)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$