Задачи по алгебре. I курс, весна 1996 года.
Листок № 5.

1) Найти положительный и отрицательный индексы инерции
   а) квадратичной функции $q(A) = \operatorname{tr} A^2$ на пространстве $M_n(\mathbb{R})$;
   б) квадратичной функции $q(A) = \operatorname{tr}(A\overline{A})$ на пространстве $M_n(\mathbb{C})$, рассматриваемом как вещественное линейное пространство.
2) Найти в $\mathbb{C}^n$ подпространство размерности $[n/2]$, на котором билинейная форма $B(x,y) = \sum x_i y_i$ тождественно равна нулю.
3) а) Пусть f — невырожденная билинейная форма на n-мерном пространстве V. Подпространство $W \subseteq V$ называется изотропным, если ограничение f на W равно нулю. Какова может быть максимальная размерность изотропного подпространства?
   б) Пусть f — невырожденная симметрическая билинейная форма, а основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Какова может быть максимальная размерность изотропного подпространства?
   в) Пусть f — невырожденная симметрическая билинейная форма, а основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$. Какова может быть максимальная размерность изотропного подпространства в зависимости от индексов инерции формы f?
4) Доказать, что если в симметрической матрице некоторый главный минор порядка r отличен от нуля, а все окаймляющие его главные миноры порядка $r+1$ и $r+2$ равны нулю, то ранг этой матрицы равен r.
5) Сопоставим каждому (неориентированному) графу Γ с вершинами $v_1, \ldots, v_n$ квадратичную функцию $q_\Gamma(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, положив

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{если } i = j, \\ -1, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены ребром}, \\ 0, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ не соединены ребром}. \end{cases}$$

   а) Доказать, что если функция q_Γ положительно определена, то граф Γ не содержит циклов, то есть каждая связная компонента его является деревом.
   б) Доказать, что если функция q_Γ неотрицательно определена, то каждая связная компонента графа Γ — либо дерево, либо замкнутая цепочка.
   в) * Описать все связные графы, для которых функция q_Γ положительно определена; неотрицательно определена.