Задачи по алгебре. I курс, весна 1996 года.
Листок № 6.

1) Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данный набор из $\binom{n}{2}$ неотрицательных вещественных чисел служил набором расстояний между
   а) n аффинно независимыми точками евклидова пространства;
   б) n произвольными точками евклидова пространства.
2) В n-мерном евклидовом пространстве V заданы два m-мерных подпространства U и W, причем существует ненулевой вектор $u \in U$, ортогональный W. Доказать, что в W найдется ненулевой вектор w, ортогональный U.
3) Доказать, что для любых двух непересекающихся аффинных подпространств L и M аффинного евклидова пространства (S, V) существует минимум расстояния $\rho(x, y)$, где $x \in L$, $y \in M$. Этот минимум называется расстоянием между L и M и обозначается через $\rho(L, M)$.

   Пусть $x_0 \in L$ и $y_0 \in M$ — произвольные точки. На какое подпространство пространства V нужно ортогонально спроектировать вектор $x_0 - y_0$, чтобы длина проекции равнялась $\rho(L, M)$?
4) Найти расстояние между двумя противоположными гранями размерностей k и $n-k-1$ правильного n-мерного симплекса с длиной ребра 1. (Две грани симплекса называются противоположными, если они не имеют общих вершин и любая вершина симплекса является вершиной одной из этих граней.)
5) Найти угол между главной диагональю n-мерного куба и его ребром; между главной диагональю и k-мерной гранью.
6) Найти угол между двумерными гранями $A_0A_1A_2$ и $A_0A_3A_4$ правильного четырехмерного симплекса.
7) Рассмотрим $(n+1)$-мерное пространство, состоящее из многочленов от x степени не выше n с вещественными коэффициентами, снабженное скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$. Доказать, что при ортогонализации базиса $(1, x, \ldots, x^n)$ получаются многочлены, пропорциональные многочленам Лежандра
$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k}\left(\left(x^2-1\right)^k\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$
   Найти коэффициенты пропорциональности.