Задачи по алгебре. I курс, весна 1996 года.
Листок № 7.

1) Найти все инвариантные подпространства оператора дифференцирования по x в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ многочленов от x степени меньшей $n+1$ с вещественными коэффициентами. То же для оператора сдвига $f(x) \mapsto f(x+a)$.
2) Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического многочлена матрицы A. Найти собственные значения
   а) линейного оператора $X \mapsto AXA^t$ в пространстве $M_n(\mathbb{C})$;
   б) линейного оператора $X \mapsto AXA^{-1}$ в пространстве $M_n(\mathbb{C})$ (матрица A невырожденная).
3) Построить все композиционные ряды $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
4) Пусть n — натуральное число.
   а) Какие простые $\mathbb{Z}$-модули и с какой кратностью входят в композиционный ряд $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
   б) Для каких n $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ разлагается в прямую сумму простых $\mathbb{Z}$-модулей?
5) Какие простые $\mathbb{C}[x]$-модули и с какой кратностью входят в композиционный ряд $\mathbb{C}[x]$-модуля $V = \mathbb{C}^3$, в котором x действует матрицей
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}?$$
6) Будем классифицировать с точностью до изоморфизма всевозможные тройки подпространств, то есть наборы $(V; V_1, V_2, V_3)$, где V — векторное пространство над полем $\Bbbk$, а V_1, V_2, V_3 — подпространства пространства V. Скажем, что набор $(V; V_1, V_2, V_3)$ разлагается в прямую сумму наборов $(U; U_1, U_2, U_3)$ и $(W; W_1, W_2, W_3)$, где U, W — подпространства пространства V, U_1, U_2, U_3 — подпространства пространства U, а W_1, W_2, W_3 — подпространства пространства W, если $V = U \oplus W$ и $V_i = U_i \oplus W_i$ для $i = 1, 2, 3$. Назовем набор $(V; V_1, V_2, V_3)$ неразложимым, если для любого его разложения в прямую сумму $(V; V_1, V_2, V_3) = (U; U_1, U_2, U_3) \oplus (W; W_1, W_2, W_3)$ либо $U = 0$, либо $W = 0$.
   а) Пусть $U = U_1 = U_2 = U_3 = V_1 \cap V_2 \cap V_3$. Доказать, что $(U; U_1, U_2, U_3)$ выделяется прямым слагаемым в $(V; V_1, V_2, V_3)$.
   б) Пусть $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = 0$. Положим $U = U_1 = U_2 = V_1 \cap V_2$, $U_3 = 0$. Доказать, что $(U; U_1, U_2, U_3)$ выделяется прямым слагаемым в $(V; V_1, V_2, V_3)$.
   в) Пусть $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = 0$. Положим $U_1 = V_1 \cap (V_2 + V_3)$, $U_2 = V_2 \cap (V_1 + V_3)$, $U_3 = V_3 \cap (V_1 + V_2)$, $U = U_1 + U_2 + U_3$. Доказать, что $(U; U_1, U_2, U_3)$ выделяется прямым слагаемым в $(V; V_1, V_2, V_3)$.
   г) Описать все (с точностью до изоморфизма) неразложимые тройки подпространств.
   д) Доказать, что в любое разложение данной тройки подпространств на неразложимые входят одни и те же (с точностью до изоморфизма) неразложимые тройки подпространств.
   е) Какие численные инварианты однозначно определяют класс изоморфизма данной тройки подпространств?