Задачи по алгебре. I курс, весна 1996 года.
Листок № 8.

1) Найти жорданову форму матрицы A и выяснить геометрический смысл соответствующего линейного оператора, если а) $A^2 = E$; б) $A^2 = A$.
2) Доказать, что если матрицы A и B удовлетворяют соотношению $AB - BA = B$, то матрица B нильпотентна.
3) Какую жорданову форму имеет матрица A, если $\operatorname{rk} A = 1$ и $\operatorname{tr} A = a$?
4) а) Доказать, что для любых $n \times n$ матриц A и B, хотя бы одна из которых невырожденна, матрица AB подобна матрице BA.
   б) Всегда ли это верно для вырожденных матриц?
5) Найти жорданову форму матрицы над полем комплексных чисел:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

6) Пусть A и B — квадратные матрицы над полем $\Bbbk$. Доказать, что минимальный многочлен блочно-диагональной матрицы $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ равен наименьшему общему кратному минимальных многочленов матриц A и B.
7) Пусть V — линейное пространство над произвольным (не обязательно алгебраически замкнутым) полем $\Bbbk$. Линейный оператор в пространстве V называется полупростым, если для любого инвариантного подпространства U найдется инвариантное дополнительное подпространство W, то есть такое, что $V = U \oplus W$. Доказать, что
   а) ограничение полупростого оператора на инвариантное подпространство — полупростой оператор;
   б) линейный оператор полупрост тогда и только тогда, когда пространство является прямой суммой минимальных (по включению) инвариантных подпространств;
   в) если для линейного оператора $\mathcal{A}$ существует разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств, на каждом из которых ограничение оператора $\mathcal{A}$ полупросто, то $\mathcal{A}$ полупрост на всем пространстве.