Задачи по алгебре. I курс, весна 1996 года.
Листок № 9.

1) *Дискриминантом* называется симметрический многочлен
$$D(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2.$$
Доказать, что $D(x_1,\dots,x_n)=\det\begin{pmatrix} n & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1}\\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2}\end{pmatrix}$, где s_k — k-я степенная сумма.
2) Найти сумму квадратов и обратных величин к корням многочлена $x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$.
3) Составить многочлен четвёртой степени, корнями которого являются α, α^{-1}, $-\alpha$, $-\alpha^{-1}$, где $\alpha\in\mathbb{C}^*$.
4) Составить многочлен шестой степени, корнями которого являются α, α^{-1}, $1-\alpha$, $(1-\alpha)^{-1}$, $1-\alpha^{-1}$, $(1-\alpha^{-1})^{-1}$, где $\alpha\in\mathbb{C}^*\setminus 1$.
5) Пусть A и B — матрицы порядка n. Доказать, что если $\operatorname{tr}A^m=\operatorname{tr}B^m$ для всех $m=1,\dots,n$, то характеристические многочлены матриц A и B равны.
6) Пусть A и B — любые матрицы порядка n. Доказать, что характеристические многочлены матриц AB и BA равны.
7) Пусть A — матрица порядка n и
$$f_1(A)=A-(\operatorname{tr}A)E,\quad f_{k+1}(A)=f_k(A)A-\frac{\operatorname{tr}(f_k(A)A)}{k+1}E.$$
Доказать, что $f_n(A)=0$.
8) Доказать, что сумма двух перестановочных полупростых операторов над полем характеристики 0 является полупростым оператором.
9) Доказать, что всякий линейный оператор $\mathcal{A}$ в векторном пространстве над полем характеристики 0 может быть представлен в виде суммы полупростого и нильпотентного операторов, являющихся многочленами от $\mathcal{A}$.
10) Доказать, что всякий линейный оператор $\mathcal{A}$ может быть единственным образом представлен в виде суммы перестановочных полупростого и нильпотентного операторов.