Задачи по алгебре. I курс, весна 1996 года.
Листок № 10.

1) Доказать, что некоторая степень минимального многочлена матрицы делится на ее характеристический многочлен.
2) Пусть у обратимой матрицы A минимальный многочлен $p(\lambda)$ равен характеристическому. Чему равен минимальный многочлен матрицы A^{-1}?
3) Пусть минимальный многочлен матрицы A равен $\prod(x-\lambda_i)^{k_i}$. Чему равен минимальный многочлен блочной матрицы $\left(\begin{smallmatrix} A & E \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$?
4) Пусть число различных собственных значений матрицы A равно m. Положим $b_{ij} = \operatorname{tr} A^{i+j}$ и обозначим через d_k определитель матрицы $(b_{ij})_{0\leqslant i,j<k}$. Доказать, что $d_m \neq 0$ и $d_{m+1} = 0$.
5) Найти условия, при которых вещественная матрица A, имеющая на побочной диагонали числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, а на остальных местах нули, диагонализуема
   а) над полем вещественных чисел;
   б) над полем комплексных чисел?
6) Доказать, что если степень минимального многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ равна размерности пространства, то всякий оператор, перестановочный с $\mathcal{A}$, равен некоторому многочлену от $\mathcal{A}$.
7) Доказать, что если для операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в конечномерном комплексном линейном пространстве V выполнены равенства $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^2 = \mathcal{E}$, то в V существует одномерное или двумерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.
8) Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле. Две $n \times n$ матрицы A и B с коэффициентами из $\Bbbk$ называются подобными, если $B = K^{-1}AK$ для некоторой обратимой $n \times n$ матрицы K с коэффициентами из $\Bbbk$. Две $n \times n$ матрицы F и G с коэффициентами из $\Bbbk[x]$ называются эквивалентными, если $G = CFD$ для некоторых $n \times n$ матриц C и D с коэффициентами из $\Bbbk[x]$ и определителем в $\Bbbk^*$. Доказать, что две $n \times n$ матрицы A и B с коэффициентами из $\Bbbk$ подобны в том и только в том случае, если их характеристические матрицы $F = xE - A$ и $G = xE - B$ эквивалентны. Как найти матрицу K, осуществляющую подобие A и B, если известны матрицы C и D, осуществляющие эквивалентность F и G?