Задачи по алгебре. I курс, весна 1996 года.
Листок № 11.

1) Доказать, что над полем комплексных чисел любое проективное преобразование имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

2) Доказать, что для всякого конечного множества точек в проективном пространстве над бесконечным полем существует содержащая его аффинная карта.

3) Доказать, что любое $(k-1)$-мерное подпространство в $\mathbb{P}^n$ можно покрыть k аффинными картами и нельзя покрыть меньшим числом аффинных карт.

4) Пусть $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \Bbbk\mathbb{P}^1$ — различные точки, и x_1, x_2, x_3, x_4 — их координаты в какой-то аффинной карте. Доказать, что двойное отношение $[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_1-x_4)(x_2-x_3)}$ не зависит от выбора аффинной карты.

5) Как с помощью геометрического построения на проективной плоскости $\Bbbk\mathbb{P}^2$ получить из точек $a_1 = (1 : 0 : 0)$, $a_2 = (0 : 1 : 0)$, $a_3 = (0 : 0 : 1)$, $a_4 = (1 : 1 : 1)$, $a = (\alpha : 0 : 1)$ и $b = (\beta : 0 : 1)$ точки

   а) $(-\alpha : 0 : 1)$; б) $(\alpha^{-1} : 0 : 1)$; в) $(\alpha\beta : 0 : 1)$?

6) Доказать, что перспективные отображения сохраняют двойные отношения.

7) Доказать, что любую тройку попарно различных точек, лежащих на одной прямой, можно перевести в любую другую тройку попарно различных точек, лежащих на одной прямой, последовательным применением нескольких перспективных отображений.

8) Доказать, что если p_1, p_2, p_3, p_4 — попарно различные точки на прямой $l \subset \Bbbk\mathbb{P}^2$, а p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 — попарно различные точки на прямой $l' \subset \Bbbk\mathbb{P}^2$, причем $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p'_1, p'_2, p'_3, p'_4]$, то для любого автоморфизма g проективной плоскости $[gp_1, gp_2, gp_3, gp_4] = [gp'_1, gp'_2, gp'_3, gp'_4]$.

9) Автоморфизм проективной плоскости называется *гомологией*, если он сохраняет все точки, лежащие на некоторой прямой l (*оси гомологии*), и все прямые, проходящие через некоторую точку $O \notin l$ (*центр гомологии*). Доказать, что

   а) любая гомология является проективным преобразованием;

   б) существует единственная гомология с заданной осью l и с заданным центром O, переводящая заданную точку $A \neq O$, $A \notin l$, в заданную точку $A' \neq O$, $A' \notin l$, лежащую на прямой OA;

   в) всякое проективное преобразование плоскости есть произведение гомологий.