Лекция 1.

Общая теория для одного уравнения первого порядка

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, нет единой теории уравнений с частными производными. Некоторые уравнения имеют свои теории, для других теории нет вообще. Это связано с более сложной геометрией. В случае обыкновенного уравнения на многообразии задано векторное поле, которое локально интегрируемо (имеет интегральные кривые). В случае уравнения с частными производными в каждой точке многообразия задано подпространство касательного пространства размерности больше 1. Как известно, уже поле двумерных плоскостей в трехмерном пространстве в общем случае не интегрируемо.

Пример. В пространстве с координатами x, y, z рассмотрим поле плоскостей, заданное уравнением $dz = y\,dx$ (в каждой точке это одно линейное уравнение на координаты касательного вектора, задающее плоскость).

Задача 1. Нарисуйте это поле плоскостей и докажите, что у него нет интегральной поверхности, т. е. такой поверхности, у которой в каждой точке касательная плоскость совпадает с плоскостью поля.

Таким образом, интегрируемые поля плоскостей — исключительное явление.

Интегральным подмногообразием поля касательных подпространств на многообразии называется подмногообразие, касательная плоскость которого в каждой точке принадлежит подпространству поля. Если удается провести интегральное подмногообразие, его размерность обычно не совпадает с размерностью плоскостей поля.

В этой лекции мы рассмотрим случай, в котором есть полная теория, а именно случай одного уравнения первого порядка. С физической точки зрения этот случай представляет собой двойственность описания явлений при помощи волн и при помощи частиц. Поле удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных первого порядка, эволюция частиц описывается системой ОДУ, имеется прием сведения УРЧП к системе ОДУ; тем самым можно свести изучение распространения волн к изучению эволюции частиц.

Запишем все в локальной системе координат: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — координаты (независимые переменные), $y = u(x)$ — неизвестная функция координат, сама буква y обозначает координату на оси значений, частные производные обозначим p, $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$.

Общее уравнение с частными производными первого порядка имеет вид: $F(x_1, \ldots, x_n, y, p_1, \ldots, p_n) = 0$.

Примеры.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0; \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = 1 \tag{1.2}$$

(уравнение эйконала в геометрической оптике);

$$u_t + u u_x = 0 \tag{1.3}$$

(уравнение Эйлера).

Рассмотрим выпуклую замкнутую кривую на плоскости с координатами x_1, x_2. Вне области, ограниченной кривой, рассмотрим функцию u расстояния до этой кривой. Тогда u — гладкая функция.

Теорема 1. *Функция u удовлетворяет уравнению* (1.2).

Доказательство. В уравнении (1.2) написано, что квадрат градиента функции u равен 1. Напомним геометрический смысл градиента: это вектор, в направлении которого скорость изменения функции наибольшая, а его длина равна абсолютной величине этой скорости. Теперь утверждение теоремы очевидно.

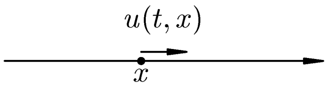

Рис. 1.1. Частица на прямой

Задача 2. а) Докажите, что любое решение уравнения (1.2) локально является суммой расстояния до некоторой кривой и постоянной.

б) Поймите, где тут двойственность описания при помощи волн и частиц (в случае затруднений ср. ниже с. 16, рис. 2.2).

Рассмотрим поле $u(t,x)$ скоростей свободно двигающихся по прямой частиц, рис. 1.1. Закон свободного движения частицы имеет вид $x = \varphi(t) = x_0 + vt$, где v — скорость частицы. Функция φ удовлетворяет уравнению Ньютона $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$. Дадим теперь описание движения через поле u скоростей: по определению, $\dfrac{d\varphi}{dt} = u\,(t, \varphi(t))$. Дифференцируем по t и получаем уравнение Эйлера:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = u_t + u_x u = 0.$$

Обратно, из уравнения Эйлера можно вывести уравнение Ньютона, т. е. эти описания движения при помощи уравнения Эйлера для поля и при помощи уравнения Ньютона для частиц эквивалентны. Мы и в общем случае построим процедуру, позволяющую свести уравнения для волн к уравнениям эволюции частиц. Но сначала рассмотрим более простые примеры линейных уравнений.

1. Пусть $v = v(x)$ — векторное поле на многообразии или в области евклидова пространства. Рассмотрим уравнение $L_v(u) = 0$, где оператор L_v обозначает производную по направлению векторного поля (производную Ли).

В координатах это уравнение имеет вид $v_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + v_n \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0$; оно называется *линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка.*

Чтобы функция u была его решением, необходимо и достаточно, чтобы u была постоянна вдоль фазовых кривых поля v. Таким образом, *решения нашего уравнения — первые интегралы поля.*

Например, рассмотрим поле $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, рис. 1.2. Решим уравнение $L_v(u) = 0$ для этого поля

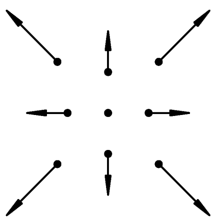

Рис. 1.2. Эйлерово поле

v. Фазовые кривые — лучи $x = e^t x_0$, выходящие из начала координат. Решение должно быть постоянно на каждом таком луче. Если наложить условие непрерывности в начале координат, то получим, что решения — константы и только они. Константы образуют одномерное линейное пространство (решения линейного уравнения должны образовывать линейное пространство).

В отличие от этого примера, в общем случае решения линейного УРЧП образуют бесконечномерное линейное пространство. Например, для уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ пространство решений совпадает с пространством функций от $n-1$ переменной:

$$u = \varphi(x_2, \ldots, x_n).$$

Оказывается, то же самое верно для уравнения общего положения в окрестности регулярной точки.

Задача Коши. Рассмотрим гладкую гиперповерхность Γ^{n-1} в x-пространстве. *Задачей Коши* называется задача: *найти решение уравнения $L_v(u) = 0$, совпадающее на гиперповерхности с заданной функцией*, рис. 1.3.

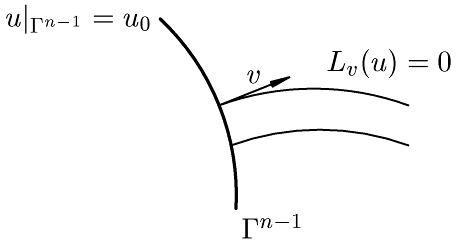

Рис. 1.3. Задача Коши

Точка гиперповерхности называется *нехарактеристической*, если поле v в ней трансверсально поверхности.

Теорема 2. *Задача Коши однозначно разрешима в окрестности каждой нехарактеристической точки.*

Доказательство. При помощи гладкой замены переменных выпрямим векторное поле, а Γ превратим в гиперплоскость $x_1 = 0$. Тогда в малой окрестности нехарактеристической точки получим задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad u|_{0,x_2,\dots,x_n} = u_0(x_2,\dots,x_n),$$

которая решается однозначно.

2. Рассмотрим задачу Коши для более общего — *линейного неоднородного* уравнения:

$$L_v(u) = f, \quad u|_{\Gamma^{n-1}} = u_0.$$

Решения такой задачи образуют *аффинное* пространство (общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного).

Гладкой заменой переменной задача приводится к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad u|_{0,x_2,\dots,x_n} = u_0(x_2,\dots,x_n).$$

Эта задача решается однозначно:

$$u(x_1,\dots) = u_0(\dots) + \int\limits_0^{x_1} f(\xi,\dots)\,d\xi.$$

3. *Квазилинейным* называется уравнение, линейное по производным. В координатах квазилинейное уравнение первого порядка имеет вид:

$$a_1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x,u). \qquad (*)$$

Заметим, что в первых двух случаях поле v связано с дифференциальным опрератором инвариантно (независимо от координат). Как инвариантно связать геометрический объект с квазилинейным уравнением?

Рассмотрим пространство с координатами $(x_1,\dots,x_n,y)$ — пространство 0-*струй функций* от $(x_1,\dots,x_n)$, обозначаемое $J^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ или, короче, J^0.

Напомню, что *пространством k-струй* функций от $(x_1,\dots,x_n)$ называется пространство многочленов Тейлора степени k.

Заметим, что аргумент $(x_1,\dots,x_n,y,p_1,\dots,p_n)$ в уравнениии 1-го порядка является 1-струей функции. Таким образом, уравнение 1-го порядка можно понимать как гиперповерхность в пространстве 1-струй функций $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Пространство 1-струй вещественнозначных функций от n переменных можно отождествить с $(2n+1)$-мерным пространством: $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{2n+1}$. Например, для функций на плоскости получаем пятимерное пространство 1-струй.

Решение уравнения $(*)$ строится при помощи его характеристик (кривых специального вида в J^0). Слово «характеристический» в математике всегда означает «инвариантно связанный». Например, характеристический многочлен матрицы оператора инвариантно связан с оператором и не зависит от базиса, при помощи которого составлена матрица. Характеристические подгруппы группы — это подгруппы, инвариантные относительно автоморфизмов группы. Характеристические классы в топологии инвариантны относительно соответствующих отображений.

Векторное поле v (в пространстве независимых переменных) называется *характеристическим полем* линейного уравнения $L_v(u) = f$.

Определение. *Характеристическим полем квазилинейного уравнения* $(*)$ называется векторное поле A в J^0 с компонентами $(a_1, \ldots, a_n, f)$.

Утверждение. *Направление этого поля является характеристическим.*

Действительно, пусть u — решение. График его — некоторая гиперповерхность в J^0. Эта гиперповерхность касается поля A, что выражено в уравнении. Верно и обратное: если график функции всюду касается поля A, то она — решение.

Отсюда становится ясным способ решения квазилинейного уравнения. Проведем в J^0 фазовые кривые характеристического поля. Они называются характеристиками. Если характеристика имеет общую точку с графиком решения, то она вся лежит на нем. Так что график составлен из характеристик.

Задача Коши для квазилинейного уравнения ставится аналогично предыдущим случаям. А именно, пусть в x-пространстве задана гладкая гиперповерхность Γ^{n-1}, а на ней — начальная функция u_0. График этой функции есть поверхность $\widehat{\Gamma}$ в J^0, которую мы рассматриваем в качестве начального подмногообразия, рис. 1.4.

Если характеристики не касаются начальной гиперповерхности $\widehat{\Gamma}$, то локально из них составляется график решения.

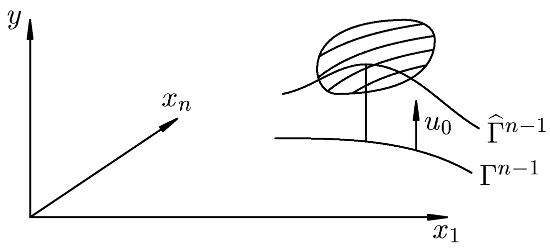

Рис. 1.4. Характеристики квазилинейного уравнения, проходящие через начальное многообразие $\widehat{\Gamma}^{n-1}$

Нехарактеристичность точки в данном случае складывается из двух условий: поле A не должно касаться $\widehat{\Gamma}^{n-1}$ и, чтобы получился действительно график, вектор поля должен быть не вертикален, т. е. компонента $a \neq 0$.

Точки, где $a = 0$, — особые; в них дифференциальное уравнение исчезает, превращаясь в алгебраическое.

Пример. Для уравнения Эйлера $u_t + uu_x = 0$ уравнение характеристик эквивалентно уравнению Ньютона: $\dot{t} = 1,\ \ \dot{x} = u,\ \ \dot{u} = 0$.

Теперь перейдем к общему уравнению первого порядка.

Рассмотрим пространство 1-струй $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, вместо $\mathbb{R}^n$ можно рассмотреть n-мерное многообразие B^n, тогда получим пространство $J^1(B^n, \mathbb{R})$; пусть (x, y, p) — локальные координаты в нем.

Уравнением с частными производными первого порядка будем называть гладкую гиперповерхность в J^1: $\Gamma^{2n} \subset J^1$.

Например, при $n = 1$ получим неявное (неразрешенное относительно производной) ОДУ.

Оказывается, в нашем пространстве J^1 имеется замечательная геометрическая структура — инвариантно заданное распределение $2n$-мерных гиперплоскостей. Например, при $n = 1$ получаем поле плоскостей в трехмерном пространстве. Структура появляется только в результате того, что пространство есть пространство 1-струй. Аналогичная структура возникает и в пространствах струй более высокого порядка, там она называется распределением Картана.

Каждая функция в пространстве k-струй имеет *k-график*. В случае 0-струй это обычный график — множество 0-струй функции: $\Gamma_u = \{\, j^0_x u \colon x \in \mathbb{R}^n \,\} = \{\, (x, y) \colon y = u(x) \,\}$. В случае 1-струй точка 1-*графика* состоит из аргумента, значения функции и значений частных производных перво-

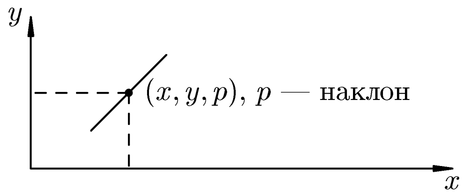

Рис. 1.5. Точка пространства 1-струй

го порядка: $\{j^1_x u\colon x \in \mathbb{R}^n\} = \left\{(x,y,p)\colon y = u(x),\, p = \dfrac{\partial u}{\partial x}\right\}$, см. рис. 1.5 для $n = 1$. Заметим, что 1-график является сечением расслоения над областью определения.

Замечание. Поверхность 1-графика диффеоморфна области определения функции, x — n-мерная координата на этой поверхности; гладкость поверхности меньше гладкости функции на 1, но в случае бесконечно гладкой или аналитической функции гладкость сохраняется.

Рассмотрим касательную плоскость к 1-графику. Это n-мерная плоскость в $(2n+1)$-мерном пространстве.

Теорема 3. *Все касательные плоскости всех 1-графиков в данной точке лежат в одной и той же гиперплоскости.*

Доказательство. Вдоль любой касательной плоскости имеем $dy = \sum \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\, dx_i = \sum p_i\, dx_i$, или $dy = p\, dx$. Поскольку в данной точке пространства 1-струй p фиксировано, получаем уравнение на компоненты касательного вектора, задающее гиперплоскость. Поэтому касательная плоскость к любому 1-графику лежит в этой гиперплоскости.

Например, при $n = 1$ уравнение $dy = p\, dx$ задает вертикальную плоскость в пространстве с координатами x, y, p. Касательными к 1-графикам являются все прямые, кроме вертикальной, лежащие в этой плоскости, рис. 1.6.

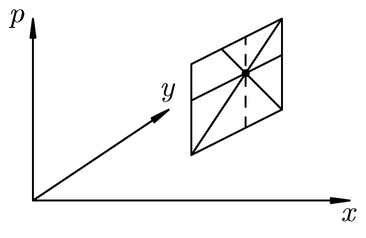

Рис. 1.6. Контактная плоскость в пространстве 1-струй

В этом случае видно, что сама гиперплоскость есть замыкание объединения касательных ко всем 1-графикам, проходящим через данную точку.

Задача 3. Доказать, что это верно для любой размерности.

Следствие. *Построенное поле гиперплоскостей $dy = p\,dx$ задано инвариантно, т. е. и в других координатах будет задано уравнением $d\tilde{y} = \tilde{p}\,d\tilde{x}$.*

Определение. Указанное поле гиперплоскостей в J^1 называется *распределением Картана* или *стандартной контактной структурой.*

Задача 4. Какой размерности бывают интегральные многообразия у поля контактных плоскостей? (Многообразие называется интегральным, если в каждой точке его касательная плоскость есть подпространство контактной плоскости.)

1-график всегда является интегральным многообразием, т. е. n-мерное интегральное многообразие существует. А есть ли большей размерности?

Ответ. Интегральных подмногообразий, размерности которых больше половины размерности контактной плоскости, поле контактных плоскостей не имеет.

Определение. Интегральное подмногообразие поля контактных плоскостей, размерность которого максимальна (т. е. равна половине размерности контактной плоскости), называется *лежандровым.*

Например, 1-графики лежандровы.

Теперь вернемся к дифференциальному уравнению.

Уравнение — это $2n$-мерное подмногообразие Γ^{2n} в J^1.

В каждой регулярной точке этой поверхности удается выделить характеристическое направление, определяемое поверхностью и контактной структурой. Мы построим характеристики (интегральные кривые этого поля направлений), а затем из них составим интегральные многообразия.

Рассмотрим в точке поверхности Γ^{2n} пересечение касательной и контактной плоскостей. Эти плоскости либо совпадают, либо имеют $(2n-1)$-мерное пересечение. В первом случае точка *особая*, во втором — *регулярная.*

Заметим, что для поверхности Γ общего положения особые точки изолированны. Действительно, на Γ имеется $2n$ координат. Рассмотрим нормаль к касательной и нормаль к контактной плоскости. Точка особая, если эти нормали имеют одинаковое направление. Это значит, что

$2n$ функций от $2n$ переменных одновременно обращаются в 0. В общем положении это случается лишь в изолированых точках.

Итак, в регулярных точках имеются $(2n-1)$-мерные пересечения касательной и контактной плоскостей. При $n=1$ это прямые. При $n>1$ — нет. Как выделить одномерное направление?

В локальных координатах контактное поле задается нулями 1-формы $\alpha = dy - p\,dx$, причем эту форму можно умножать на функцию, не обращающуюся в 0, — поле (контактная структура) при этом не меняется.

2-форма $\omega^2 = d\alpha$ — внешний дифференциал формы α — уже не определяется инвариантно контактной структурой, однако, верно следующее

Предложение 1. *Форма $\omega|_{\alpha=0}$ определена инвариантно с точностью до умножения на ненулевое число в каждой точке.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = f\alpha$. Тогда $d\tilde{\alpha} = df \wedge \alpha + f d\alpha$.

$$d\tilde{\alpha}|_{\alpha=0} = f d\alpha|_{\alpha=0},$$

т. е. $\tilde{\omega}^2$ отличается от ω^2 умножением на число в каждой точке (говорят, что *конформный тип* формы ω^2 определен инвариантно). Заметим, что, где $\alpha = 0$, там и $\tilde{\alpha} = 0$.

Предложение 2. *$\omega|_{\alpha=0}$ является симплектической структурой.*

Напомню, что *симплектической структурой* называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма в четномерном пространстве.

Невырожденность формы ω означает, что $\forall \xi \neq 0\ \exists \eta\ \omega(\xi, \eta) \neq 0$.

Доказательство предложения 2. В локальных координатах наша форма имеет вид: $d\alpha = -\sum dp_i \wedge dx_i$, где p_i, x_i — координаты в плоскости $\alpha = 0$.

Упражнение. Выпишите матрицу формы $\sum dp_i \wedge dx_i$ и убедитесь, что форма невырожденна.

Эта форма называется *кососкалярным произведением*. Выясним его геометрический смысл.

Пусть $n = 1$. Тогда $\omega = dx \wedge dp$. Значение этой формы на паре векторов есть ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы, рис. 1.7. В случае большей размерности $\omega(\xi, \eta)$ есть сумма ориентированных площадей проекций параллелограмма со сторонами ξ, η на плоскости с координатами (x_i, p_i).

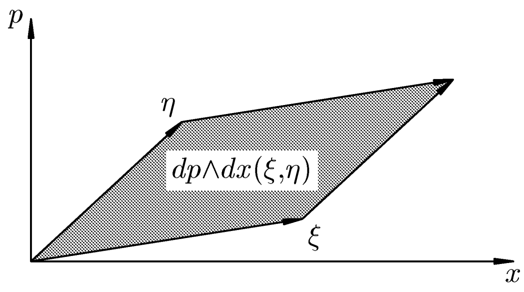

Рис. 1.7. Симплектическая структура

Вспомним, что в евклидовом пространстве имеется понятие ортогонального дополнения. В n-мерном пространстве ортогональное дополнение к k-мерному подпространству является $(n-k)$-мерным подпространством. Для доказательства этого факта нужна только билинейность и невырожденность скалярного произведения, а симметричность не нужна, значит, то же самое верно и в случае кососкалярного произведения.

Итак, косоортогональным дополнением к $(2n-1)$-мерной плоскости в $2n$-мерном симплектическом пространстве является прямая. Но в отличие от евклидова случая она лежит в этой плоскости!

Лемма. *Косоортогональное дополнение к гиперплоскости в симплектическом пространстве есть прямая, лежащая в этой гиперплоскости.*

Доказательство. Пусть прямая натянута на вектор ξ. Косоортогональное дополнение к ней есть гиперплоскость $\{\eta\colon \omega(\xi, \eta) = 0\}$. Вектор ξ лежит в этой гиперплоскости, так как $\omega(\xi, \xi) = -\omega(\xi, \xi) = 0$.

Определение. *Характеристическим направлением* в контактной плоскости называется косоортогональное дополнение к пересечению контактной и касательной к Γ плоскостей в регулярной точке.

Это косоортогональное дополнение — прямая. Итак, имеется инвариантная контактная структура и инвариантное отношение косоортогональности в каждой контактной плоскости. Тем самым в каждой

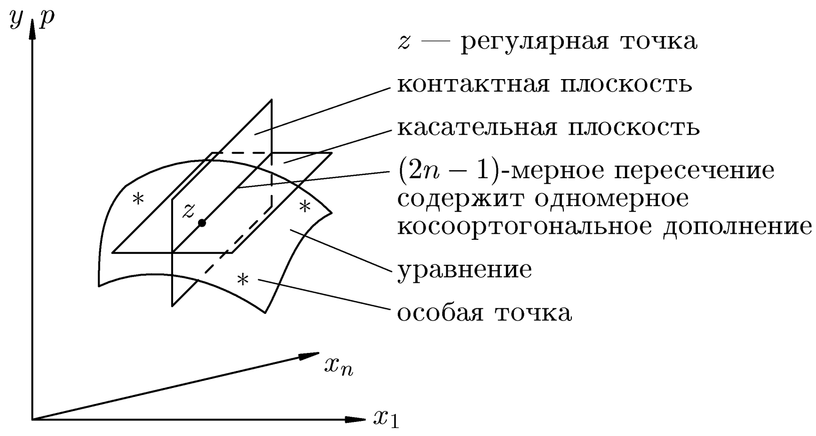

Рис. 1.8. Характеристическое направление для общего уравнения первого порядка

регулярной точке инвариантно выделяется характеристическое направление, рис. 1.8.

Характеристиками называются интегральные кривые этого поля направлений.

Задача 5. Вычислите характеристическое поле направлений в координатах x, y, p, т. е. задайте его системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = ?$, $\dot{y} = ?$, $\dot{p} = ?$

Литература

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 3-е изд.— М.: Наука, 1984. С. 105–112.
2. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978. Гл. 2.