Лекция 10.

Потенциал двойного слоя

Итак, мы нашли фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$:

при $n > 2$ $u_0 = \dfrac{1}{-(n-2)\omega_{n-1}r^{n-2}}$, где ω_{n-1} — поверхность единичной сферы в $\mathbb{R}^n$;

при $n = 2$ $u_0 = -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}$;

при $n = 1$ $u_0 = \dfrac{|x|}{2}$.

Между прочим, знаки определяются условием $\Delta u_0 = \delta$ так: при сглаживании особенности вблизи нуля у сглаженной функции должна получиться положительная вторая производная. Коэффициент определяется из условия, что поток $\operatorname{grad} u$ через единичную сферу должен быть равен 1.

При помощи фундаментальных решений мы построили потенциалы: объемный, дающий решение уравнения Пуассона, а также простого слоя. Теперь займемся потенциалом двойного слоя.

Рассмотрим на гиперповерхности распределение зарядов в два слоя (один слой положительный, другой — отрицательный) с некоторой плотностью $\rho(x)$ (ρ — функция на гиперповерхности), рис. 10.1.

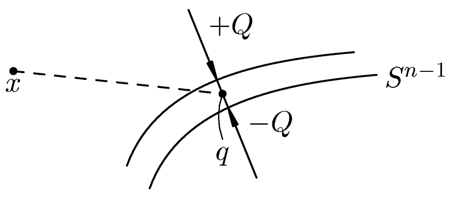

Рис. 10.1. Двойной слой на гиперповерхности

Здесь имеется в виду следующий предельный переход. Пусть l — расстояние между зарядами по нормали, проведенной к гиперповерхности в точке q; заряды $+Q = \rho/l$ и $-Q = -\rho/l$ имеют величину порядка $1/l$; они создают некоторое поле. Мы вычисляем предел поля при $l \to 0$. Этот предел называется *полем диполя*, а его потенциал — *потенциалом диполя* или *дипольным потенциалом.* При переходе к пределу *дипольный момент* $\rho = Ql$ сохраняется. Направление, соединяющее бесконечно близкие заряды, составляющие диполь, называется *осью диполя.* Потенциал двойного слоя плотности ρ, распределенного на гиперповерхности, есть интеграл от дипольных потенциалов зарядов, расположенных на гиперповерхности, оси которых — нормали к гиперповерхности, причем дипольный момент в бесконечно малой области ds на гиперповерхности есть $\rho\, ds$.

Проведем вычисление потенциала диполя в терминах фундаментального решения u_0:

$$u_0\left(x-\left(q+n_q\frac{l}{2}\right)\right)\frac{\rho}{l}-u_0\left(x-\left(q-n_q\frac{l}{2}\right)\right)\frac{\rho}{l}= \\ =\rho\frac{\partial u_0(x-q)}{\partial n_q}+o(1) \quad \text{при} \quad l\to 0.$$

Здесь n_q — внешняя нормаль к гиперповерхности в точке q.

Мы нашли элемент потенциала двойного слоя, созданный диполем, расположенным в точке q, а в целом потенциал двойного слоя в точке x равен

$$u(x)=\int\limits_{S^{n-1}}\rho(q)\frac{\partial u_0(x-q)}{\partial n_q}dq.$$

Свойства потенциала двойного слоя

1. Вместо нормированного условием $\Delta u_0 = \delta$ фундаментального решения обычно используется функция $u_0 = \dfrac{1}{r^{n-2}}$ (при $n > 2$) и $u_0 = \ln\dfrac{1}{r}$ при $n = 2$. Потенциал двойного слоя — гармоническая функция во внутренней и во внешней области, ограниченной поверхностью, поскольку это было верно до предельного перехода;

$$\Delta u|_{\mathbb{R}^n\setminus S^{n-1}}=0.$$

Внутренних областей может даже быть несколько, если поверхность не связна.

Пример. Пусть $n = 2$, $\rho \equiv 1$ на связной замкнутой кривой. Тогда $u(x) = \mathrm{const}$, причем константы разные вне кривой, внутри и на кривой.

Сейчас мы докажем этот удивительный факт. Проведем вначале вычисление потенциала диполя. Центр диполя можно считать началом координат. Производная фундаментального решения по направлению любого вектора $\vec{v}$ есть

$$L_v \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} L_v r = -\frac{|\vec{v}| \cos \varphi}{r}.$$

Действительно, $L_v r$ легко вычисляется для любой размерности:

$$L_v \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \frac{2(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n)}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{(\vec{v}, \vec{r})}{r} = v \cos \varphi,$$

см. рис. 10.2.

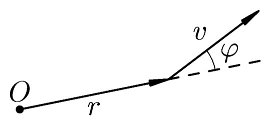

Рис. 10.2. Производная радиус-вектора по вектору v

Производная фундаментального решения при любом $n > 2$ вычисляется аналогично:

$$L_v \frac{1}{r^{n-2}} = \frac{(2-n)(\vec{r}, \vec{v})}{r^n}.$$

Заметим, что на бесконечности потенциал отдельного заряда убывает, как $1/r^{n-2}$, а потенциал диполя — быстрее, как $1/r^{n-1}$. (Говорят, что положительный и отрицательный заряды «экранируют» друг друга.)

Нарисуем линии уровня потенциала диполя (для $n = 2$). Если направить ось x вдоль вектора $\vec{v}$, то получим функцию $\dfrac{x}{r^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Это очень важная гармоническая на плоскости без нуля функция. Она имеет особенность в нуле. Ее линии уровня — конические сечения, заданные уравнениями $x^2 + y^2 = cx$. Они образуют семейство окружностей, проходящих через начало координат и касающихся там друг друга. Эти окружности перпендикулярны оси диполя в его центре, рис. 10.3.

Задача. Нарисовать линии уровня потенциала пары разноименных зарядов одинаковой величины на плоскости.

У к а з а н и е. Разность логарифмов двух чисел равна логарифму отношения этих чисел. Геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух данных точек постоянно (рис. 10.4), есть окружность (почему?). При слиянии зарядов ($l \to 0$) система окружностей (рис. 10.4) переходит в систему окружностей (рис. 10.3) с общей касательной в центре диполя.

В нашей системе координат линия уровня потенциала диполя — окружность — касается оси y. Если кривая, в точках которой мы исследуем потенциал диполя, перпендикулярна оси диполя и имеет в его центре конечную кривизну, то она имеет касание второго порядка со своей соприкасающейся окружностью, входящей в наше семейство линий уровня потенциала диполя. Поэтому предельное значение потенциала диполя при стремлении точки к центру диполя вдоль этой кривой, проходящей через центр диполя, вполне определено и равно значению потенциала диполя на соприкасающейся окружности, т. е. равно половине кривизны кривой.

Следствие. *Подынтегральная функция интеграла, определяющего потенциал двойного слоя, ограниченная на тор* $\{x \in S,\ q \in S\}$, *продолжается по непрерывности даже на диагональ* $x = q$ (*где подынтегральная функция не определена*).

Рассмотрим элемент кривой и угол, под которым он виден в данной точке x. Получится функция, гармоническая по x во всех точках, кроме точек этого элемента кривой, рис. 10.5.

Действительно, этот угол равен $\dfrac{ds\sin\varphi}{r} = ds\dfrac{x}{x^2+y^2}$, где $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$.

Отсюда ясен *геометрический смысл потенциала* (*диполя*): это *элемент угла, под которым виден из данной точки элемент кривой.* Причем это справедливо в любой размерности: вклад окрестности ds гиперповерхности в интеграл, вычисляемый в данной точке x, есть элемент телесного угла, под которым элемент ds виден из точки x.

Задача. Докажите для любой размерности, что телесный угол,

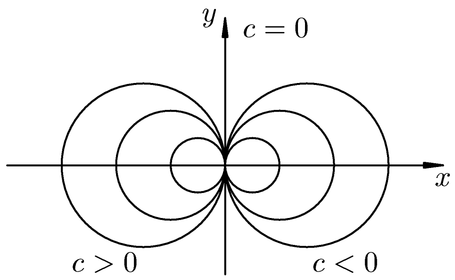

Рис. 10.3. Линии уровня потенциала диполя

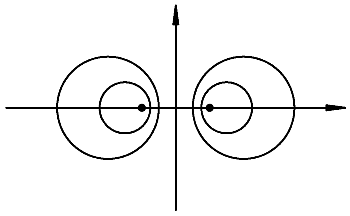

Рис. 10.4. Линии уровня потенциала пары противоположных зарядов

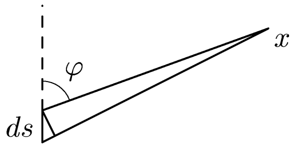

Рис. 10.5. Угол, под которым виден элемент кривой, — гармоническая функция

под которым виден элемент поверхности, — гармоническая функция.

Указание. Воспользуйтесь формулой производной фундаментального решения вдоль векторного поля.

Для $n = 2, 3$ потенциал диполя, определяемый как производная от $\ln \frac{1}{r}$ или $\frac{1}{r}$ соответственно, в точности совпадает с элементом телесного угла; в больших размерностях n появится коэффициент $n - 2$, если использовать $u_0 = \frac{1}{r^{n-2}}$. Равенство будет на самом деле с точностью до знака, зависящего от выбора ориентации гиперповерхности, по которой ведется интегрирование элемента угла. Гиперповерхность ориентируется как граница ориентированной «внутренней» области.

Если $\rho \equiv 1$, то при $n = 2$ после интегрирования элемента угла мы получаем «угол, под которым граничная кривая видна из точки x», точнее, при указанном выборе ориентации кривой потенциал равен $-2\pi \times$ (число оборотов вектора из точки x к точке кривой при обходе всей кривой). При $n = 3$ аналогично получим ориентированный полный телесный угол, под которым видна поверхность из точки x, рис. 10.6.

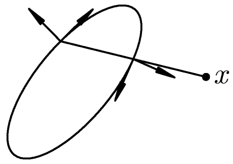

Рис. 10.6. Полный телесный угол

Это рассуждение заменило довольно длинные вычисления. При $n = 2$ получаем для потенциала двойного слоя плотности 1, распределенного вдоль связной замкнутой кривой, значение -2π во внутренней

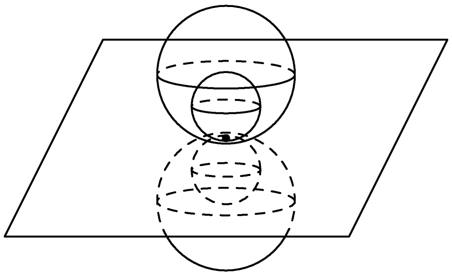

Рис. 10.7. Эквипотенциальные поверхности диполя при $n > 2$

области, в наружной — 0, на самой кривой — $-\pi$, если в этой точке существует касательная.

При $n = 3$ получаем соответственно $-4\pi, 0, -2\pi$. Аналогично можно получить значения в любой размерности.

Замечание. В n-мерном случае гиперповерхности уровня потенциала диполя задаются уравнением $\dfrac{\sin\varphi}{r^{n-1}} = \mathrm{const}$.

Эквипотенциальные поверхности диполя имеют в его центре касательную гиперплоскость, перпендикулярную оси диполя, проходят через центр диполя, касаясь друг друга, но имеют в этой точке при $n > 2$ уплощение, рис. 10.7. При четных n эквипотенциальные поверхности аналитические, включая и центр диполя. При нечетных n эквипотенциальные поверхности имеют в центре диполя такую же особенность, как график функции $|x|^n$ от $n-1$ переменной.

При $n > 2$ кривизна каждой эквипотенциальной поверхности диполя в его центре равна нулю.

Поверхность общего положения, касающаяся эквипотенциальных поверхностей в центре диполя, будет поэтому иметь при $n > 2$ общие точки со *сколь угодно малыми* эквипотенциальными гиперповерхностями диполя. Поэтому наш потенциал диполя на некоторых из них очень велик (по модулю). Значит, на поверхности общего положения, проходящей через центр диполя перпендикулярно его оси, потенциал элемента двойного слоя будет иметь особенность, обращаясь в бесконечность.

Из-за этого, вообще говоря, теория разрешимости краевых задач для уравнения Лапласа в многомерном случае не совсем аналогична обычно излагаемой в учебниках для $n = 2$ теории Фредгольма. А именно, при $n > 2$ не достаточна используемая в теории Фредгольма теория интегральных уравнений с непрерывным ядром. Правда, особенность

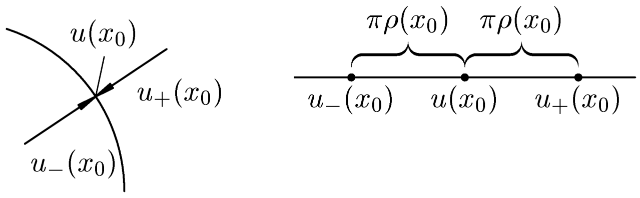

Рис. 10.8. Скачок потенциала двойного слоя

достаточно слабая — суммируемая, поэтому можно применить теорию операторов с суммируемым ядром.

Пусть теперь плотность $\rho \neq \mathrm{const}$. Исследуем свойства потенциала двойного слоя.

1. Свойство гармоничности u во внутренней и во внешней областях сохраняется.

2. Легко найти разницу значений функции u на границе области и ее предельных значений при подходе к границе из внутренней области и из внешней области. Она такая же, как если бы плотность была постоянной. А именно ($n = 2$):

$$u_-(x_0) = u(x_0) - \pi\rho(x_0), \quad u_+(x_0) = u(x_0) + \pi\rho(x_0),$$

где $u_-(x_0)$ — предел изнутри, $u_+(x_0)$ — предел снаружи, рис. 10.8.

Для доказательства рассмотрим вспомогательный потенциал двойного слоя с постоянной плотностью $\rho = \mathrm{const} \equiv \rho(x_0)$; для него это утверждение верно. Затем рассмотрим потенциал с плотностью $\rho - \rho(q)$, которая равна 0 в точке q, и докажем, что у него скачок нулевой. Вместо формального доказательства я объясню, почему это так. Если бы плотность была нулевой в целой окрестности точки q, то эта окрестность не создавала бы двойного слоя. Остальная часть поверхности создала бы в этой окрестности потенциал двойного слоя — гармоническую функцию без особенностей. Поэтому скачки в точке q обратились бы в нули. На самом деле плотность равна нулю не в окрестности, а только в самой точке q. Поэтому для доказательства исчезновения скачка нужно провести оценки, аналогичные приведенным в приложении к предыдущей лекции. Эти элементарные оценки показывают, что скачок потенциала равен 0. Достаточным условием для этого является непрерывность плотности в точке q.

3. Производная потенциала двойного слоя по нормали (нормаль ориентирована в одном и том же направлении как для точек внутренней области, так и для точек наружной) не имеет скачка.

В случае постоянной плотности это действительно верно — производная и снаружи, и внутри равна 0. В общем случае производная потенциала есть сила («напряженность» поля). Рассмотрим цилиндрическую область Ω, близкую к элементу ds поверхности, рис. 10.9. Вычи-

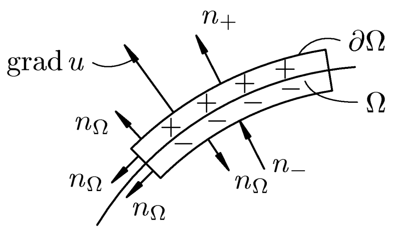

Рис. 10.9. К вычислению скачка нормальной производной потенциала двойного слоя

слим поток поля силы $\operatorname{grad} u$ через границу этой области. Учитываем (как в предыдущей лекции) только нормальную компоненту:

$$ds\left(\frac{\partial u}{\partial n_+} - \frac{\partial u}{\partial n_-}\right).$$

По формуле Стокса поток равен

$$\int\limits_{\partial\Omega} (\operatorname{grad} u, n_\Omega)\, ds = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\operatorname{grad} u\, dx = \int\limits_{\Omega} \Delta u\, dx = \mathrm{const} \int\limits_{\Omega} Q\, dx = 0,$$

поскольку этот интеграл есть общий заряд в рассматриваемой области, а он нулевой (положительные заряды компенсируются отрицательными). Итак,

$$\frac{\partial u}{\partial n_+} = \frac{\partial u}{\partial n_-}.$$

Ниже мы еще используем свойства потенциала двойного слоя, а сейчас займемся свойствами оператора Лапласа.

Фундаментальные решения имеют важные приложения к задаче о колебаниях сферически симметричных тел. Рассмотрим, например, окружность на плоскости (периодическую струну). Окружность $x^2 + y^2 = 1$ является римановым многообразием, а значит, на ней определен оператор Лапласа $\operatorname{div}\operatorname{grad}$. На окружности имеется стандартная полярная координата φ. Через эту координату оператор $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ на окружности выражается обычным образом: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$.

В больших размерностях вместо задачи о колебаниях струны получаем задачу о колебаниях сферы. Здесь нет единой координаты. Вместо тригонометрических функций $(\sin k\varphi, \cos k\varphi)$, описывающих собственные колебания струны, колебания сферы описываются так называемыми сферическими функциями, появляющимися во всех задачах математической физики, где имеется сферическая симметрия. Место теории рядов Фурье функций на окружности для функций на сфере занимает разложение по сферическим гармоникам.

С практической точки зрения интересна задача о гравитационном потенциале Земли, который влияет на движение спутников. В свою очередь, спутники можно рассматривать как индикаторы, по которым можно судить о распределении масс в Земле. Как мы вскоре увидим, вклады высоких гармоник быстро убывают с удалением от Земли, так что не слишком близко к Земле потенциал близок к сумме сферически симметричной главной части $\frac{c_1}{r}$ и дипольного возмущения $\frac{c_2 z}{r^3}$.

Рассмотрим задачу о собственных функциях оператора Лапласа на n-мерной сфере. $n = 1$ это обычные тригонометрические функции. Решив периодическую краевую задачу для уравнения $\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \lambda u$, можно найти все гармоники. Это в точности комбинации $\sin k\varphi$ и $\cos k\varphi$ с целыми k (собственное число $\lambda = -k^2$).

Как обстоит дело в бóльших размерностях, например на двумерной сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$? Сейчас мы познакомимся со сферическими функциями, которые с этой точки зрения являются обобщением тригонометрических.

Рассмотрим функцию $u(x, y, z)$, постоянную вдоль каждого луча, выходящего из начала координат. Такая функция называется однородной степени 0 (напомню, что функция называется однородной степени k, если $u(\lambda x) = \lambda^k u(x)$ для всякого $\lambda > 0$).

В начале координат функция может не быть определенной. Например, однородной функцией степени 0 является

$$u(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + x^2}{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}.$$

Задача. Найдите $\Delta u|_{S^2}$ и сравните с $\operatorname{div}\operatorname{grad}(u|_{S^2})$.

Последний оператор называется *сферическим лапласианом.* Я буду обозначать его через $\tilde{\Delta}$.

Оказывается, в пространстве любой размерности n для однородной функции u любой степени k справедливо тождество:

$$\tilde{\Delta} u = r^2 \Delta u - \Lambda u, \quad \Lambda = k^2 + k(n-2).$$

Стоящий в левой части равенства оператор — это сферический лапласиан, продолженный на все пространство по однородности степени k; на единичной сфере $r^2 = 1$ это просто сферический лапласиан:

$$\tilde{\Delta}u|_{r^2=1} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\left(u|_{r^2=1}\right).$$

Рассмотрим частные случаи:

1. При $k = 0$ имеем тождество

$$\tilde{\Delta}u = r^2\Delta u. \tag{10.1}$$

Его легко объяснить. Градиент однородной функции u степени 0, ограниченный на единичную сферу, совпадает с градиентом ограничения самой функции на эту сферу, поскольку градиент однородной функции нулевой степени касается сферы. Так же легко получить из рассмотрения потоков, что совпадают и дивергенции градиентов. Т.е. для однородных функций степени 0 обычный и сферический лапласианы на единичной сфере совпадают: $(\tilde{\Delta}u)|_{r^2=1} = (\Delta u)|_{r^2=1}$. А тождество (10.1) получается в силу продолжения сферического лапласиана на все пространство с сохранением однородности. Действительно, оператор Δ понижает степень однородности на 2 единицы, поэтому Δu — однородная функция степени -2. Чтобы продолжение имело степень 0, функцию Δu степени -2 нужно умножить на r^2.

2. Пусть $n = 2,\ \ k \neq 0$. Наше тождество принимает вид

$$\tilde{\Delta}u = r^2\Delta u - k^2 u.$$

Применим его к однородной степени k гармонической на плоскости функции $u =\mathrm{Re}\ z^k$ (в частности, при $k = 2$, на единичной окружности $u = \cos 2\varphi$).

Наше тождество принимает вид $\tilde{\Delta}u = -k^2 u$.

Мы не будем пока заниматься доказательством общего тождества, отметим только, что оно основано на формуле Эйлера для однородных функций степени k (докажите ее в качестве упражнения):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = ku.$$

Следствие. *Пусть функция однородная и гармоническая. Тогда она, ограниченная на единичную сферу, — собственная для сферического лапласиана:*

$$\tilde{\Delta}u = -\Lambda u.$$

Ниже мы увидим, что так получаются все собственные функции сферического лапласиана.

Определение. *Сферическими функциями* на сфере S^{n-1} называются ограничения на сферу однородных гармонических многочленов в $\mathbb{R}^n$.

Задача. Найдите размерность пространства сферических функций, являющихся ограничениями гармонических многочленов заданной степени однородности k в $\mathbb{R}^n$.

Например, для $n = 3$ получаем:

k	0	1	2	...
размерность	1	3	5	...
		(базис x, y, z)	(базис xy, yz, zx, $x^2 - y^2$, $y^2 - z^2$)	

Остановимся на одном интересном приложении сферических функций к топологической задаче.

Теорема Максвелла. *При $n = 3$ все сферические функции данной степени k можно получить, последовательно дифференцируя потенциал $1/r$ вдоль подходящих постоянных векторных полей: $L_{v_k} \dots L_{v_1} \dfrac{1}{r}$* (результат такого дифференцирования называется *мультипольным потенциалом*) *и ограничивая результат на единичную сферу. При этом k полей $v_1, \dots, v_k$ определяются по данной ненулевой сферической функции степени k однозначно (с точностью до ненулевых множителей).*

Размерность пространства сферических функций степени k равна $2k + 1$. Рассматривая их с точностью до ненулевой мультипликативной постоянной и исключая 0, получаем проективное пространство $\mathbb{R}P^{2k}$.

С другой стороны, по теореме Максвелла все сферические функции степени k с точностью до ненулевого множителя можно получить из $1/r$, дифференцируя вдоль k постоянных полей векторов длины 1 в $\mathbb{R}^3$. Постоянные векторы длины 1 определяются функцией однозначно с точностью до знаков. Дифференцирования вдоль постоянных полей коммутируют, поэтому результат не зависит от порядка.

Таким образом, мы построили взаимно однозначное отображение

$$\mathbb{R}P^2 \times \dots \times \mathbb{R}P^2 / S(k) \to \mathbb{R}P^{2k},$$

где $S(k)$ — симметрическая группа перестановок k сомножителей.

Первое из пространств называется *симметрической k-й степенью* проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ и обозначается через $S^k\,\mathbb{R}P^2$. Построенное отображение Максвелла $S^k\,\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^{2k}$ — гомеоморфизм. Повидимому, теорема Максвелла — самое элементарное доказательство гомеоморфности этих пространств.

Родственная теорема из алгебры — теорема Виета. Отображение Виета

«корни $\longrightarrow$ элементарные симметрические многочлены от корней»

задает гомеоморфизм симметрической k-й степени $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^k$: $S^k\,\mathbb{C} \approx \mathbb{C}^k$.

Соответствующая проективная теорема: $S^k(\mathbb{C}P^1) \approx \mathbb{C}P^k$. Комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ — это сфера Римана S^2, так что проективная теорема Виета доставляет гомеоморфизм $S^k(S^2) \approx \mathbb{C}P^k$.