Лекция 11.

Сферические функции. Теорема Максвелла. Теорема об устранимой особенности

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ однородную функцию F степени k:

$$F(\lambda x) = \lambda^k F(x) \quad \forall \lambda > 0.$$

В нуле такая функция может не быть определена (однородная функция может быть задана в однородной области, например, в некотором телесном угле с началом 0).

Мы определили для каждого k модифицированный сферический оператор Лапласа $\tilde{\Delta}$, который переводит однородные функции степени k в однородные с сохранением степени однородности. Напомним его определение: функция ограничивается на единичную сферу, там от нее берется дивергенция градиента, результат продолжается как однородная функция степени k на все пространство, кроме начала координат.

Теорема. $\tilde{\Delta} F = r^2 \Delta F - \Lambda F, \ \ \Lambda = k^2 + k(n-2)$.

Доказательство. Вычислим $\Delta F = \operatorname{div}\operatorname{grad} F$. Пусть f — ограничение F на единичную сферу: $f = F|_{S^{n-1}}, \ \ f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$. Тогда $(\operatorname{grad} F)|_{S^{n-1}} = \operatorname{grad} f + \dfrac{\partial F}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial n}$, см. рис. 11.1

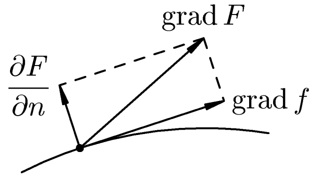

Рис. 11.1. Сферический и полный градиенты

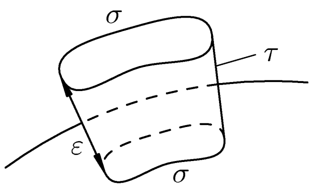

Рис. 11.2. Вычисление потока через пробную поверхность

(конечно, мы считаем здесь касательное пространство к сфере в точке вложенным в касательное пространство к объемлющему пространству).

По однородности $F(rq) = r^k f(q)$, поэтому $\dfrac{\partial F}{\partial r} = kr^{k-1}f(q)$. Нам достаточно найти градиент на единичной сфере, поскольку он однороден степени $k-1$. Наше поле раскладывается на касательную и нормальную составляющие, причем касательная составляющая не имеет потока через крышки пробной поверхности, а нормальная — через боковые стенки, рис. 11.2.

Вычислим поток градиента через пробную поверхность:

$$\int\limits_{\partial G} (\operatorname{grad} F, \vec{n})\, dS = \int\limits_{\tau} (\operatorname{grad} F, \vec{n})\, dS + \sigma(1+\varepsilon)^{n-1} kf(1+\varepsilon)^{k-1} - \sigma k f,$$

где первый член — поток через боковую поверхность, второй — через верхнюю крышку, третий — через нижнюю. В результате получаем:

$$\int\limits_{\tau} (\operatorname{grad} F, \vec{n})\, dS + \sigma(n+k-2)\varepsilon k F + o(\varepsilon).$$

Здесь $\varepsilon\sigma$ — объем пробной области; функции F и f совпадают на единичной сфере. Деля поток на объем пробной области и стягивая пробную область к точке на единичной сфере, получаем в этой точке:

$$\Delta F = \tilde{\Delta} f + kF(n+k-2).$$

(Действительно, поток $\operatorname{grad} F$ через ∂G есть интеграл от $\operatorname{div}\operatorname{grad} F$ по G, в то время как поток от $\operatorname{grad} F$ через τ есть $\varepsilon \times$ (поток $\operatorname{grad} f$ через $\partial\sigma$) $+ o(\varepsilon)$, а поток в скобках равен интегралу от $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$ по σ.)

Таким образом, наше тождество доказано на единичной сфере. При продолжении в точку, находящуюся от начала координат на расстоянии r, в правой части F умножится на r^k, ΔF — на r^{k-2}. Поэтому и возникнет множитель r^2 в первом слагаемом доказываемого тождества.

Модифицированный сферический лапласиан однороден степени k по определению. Поэтому из выполнения тождества на единичной сфере следует его выполнение везде (кроме начала координат). Итак, тождество доказано.

Наша теорема — частный случай следующего простого, но полезного замечания о лапласиане функции на подмногообразии евклидова пространства: при вычислении значения лапласиана в точке можно заменить подмногообразие его касательным пространством в этой точке, а функцию — соответствующей функцией на касательном постранстве.

Рассмотрим m-мерное подмногообразие («поверхность»)

$$y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^l$$

в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{m+l}$ с метрикой $dx^2 + dy^2$. Будем называть x-подпространство *горизонтальным*, y-подпространство *вертикальным*. Будем рассматривать декартовы координаты точки x как координаты точки $X = (x, y = f(x))$ на поверхности.

Функция U, заданная на поверхности, записывается в этих координатах как функция на горизонтальной плоскости

$$u(x) = U(X).$$

Лемма. *Предположим, что касательная плоскость поверхности в точке* 0 *горизонтальна (т. е. что* $(df/dx)(0) = 0$*). Тогда риманов лапласиан фукнции* U *на поверхности совпадает в этой точке с евклидовым лапласианом функции* u *на касательной плоскости.*

Доказательство. Запишем метрику на поверхности в виде римановой метрики dS^2 на горизонтальной плоскости. Из теоремы Пифагора следует, что отличие dy^2 этой метрики от евклидовой метрики горизонтальной плоскости — второго по $|x|$ порядка малости:

$$dS^2 - dx^2 = O(|x|^2)$$

(здесь и далее малость квадратичной формы или дифференциального оператора означает, конечно, малость коэффициентов). Поэтому операторы GRAD и DIV риманова градиента и римановой дивергенции, соответствующие метрике dS^2 на горизонтальной плоскости, отличаются от евклидовых grad и div малыми второго порядка:

$$\mathrm{GRAD} - \mathrm{grad} = O(|x|^2), \qquad \mathrm{DIV} - \mathrm{div} = O(|x|^2).$$

Применяя эти операторы последовательно к функции u, мы находим

$$\mathrm{DIV}\,\mathrm{GRAD}\,u = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,u + O(|x|^2) + \mathrm{div}\,O(|x|^2).$$

Последнее слагаемое есть $O(|x|)$, поэтому

$$(\mathrm{DIV}\,\mathrm{GRAD}\,u)(0) = (\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,u)(0).$$

Замечание. Перенесение функции на касательную плоскость не обязательно проводить при помощи ортогонального проектирования: можно использовать любое семейство гладких кривых, важно лишь, чтобы проходящая через нашу точку кривая была в ней ортогональна поверхности.

Пример. Рассмотрим единичную сферу $y = \sqrt{1-x^2}$ в n-мерном евклидовом пространстве и точку $x = 0$ на ней ($m = n-1$, $l = 1$). Рассмотрим функцию U на сфере. Вычислим ее сферический лапласиан в точке $x = 0$.

По лемме он равен евклидову лапласиану $\Delta(x)u$ (сумме вторых частных производных по x_i от соответствующей функции $u(x)$).

Однородное степени k продолжение функции U в евклидово пространство обозначим через $\widetilde{U}$. На касательной плоскости $y = 1$ сферы в точке $x = 0$ эта функция обращается в функцию

$$\tilde{u}(x) = (\sqrt{1+x^2})^k u(\tilde{x}), \quad |\tilde{x} - x| = O(|x|^3).$$

Поэтому евклидов лапласиан продолжения в нашей точке $x = 0$, $y = 1$ есть

$$\Delta\widetilde{U} = \frac{d^2}{dy^2} y^k u(0) + (\Delta_x \tilde{u})(0) = k(k-1)u(0) + \Delta_x \tilde{u}.$$

Но $\tilde{u}(x) = u(x) + \dfrac{k}{2}x^2 u(0) + O(|x|^3)$. Поэтому в точке $x = 0$

$$\Delta_x(\tilde{u}) = \Delta_x u + k(n-1)u.$$

Окончательно, в нашей точке

$$\Delta\widetilde{U} = \Delta_x u + [k(n-1) + k(k-1)]u(0).$$

Поскольку выбранная точка ничем не отличается от остальных, мы доказали нашу формулу $\tilde{\Delta}F = r^2\Delta F - \Lambda F,\ \ \Lambda = k(n+k-2)$ при $r=1$. По однородности она верна везде.

Следствие. *Если функция F (заданная в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) гармоническая и однородная степени k, то она собственная для (модифицированного) сферического лапласиана: $\tilde{\Delta}F = -\Lambda F$ (т. е. ее ограничение на сферу — собственное для сферического лапласиана). Обратно, собственная функция сферического лапласиана, продолженная с единичной сферы однородно степени k, гармонична всюду, кроме нуля.*

Заметим, что для одной и той же собственной функции лапласиана на единичной сфере можно найти д в а гармонических продолжения, поскольку из квадратного уравнения $\Lambda = k^2 + k(n-2)$ определяются д в а значения k.

Пример. Пусть $n=2$ (т.е. мы рассматриваем функции на плоскости и их ограничения на окружность). При $n=2$ имеем $\Lambda = k^2$. Гармонической однородной функцией степени 1 является функция x. Но существует также гармоническая однородная функция степени -1, ограничение которой на единичную окружность такое же, как и у функции x.

В полярных координатах формулы этих сопряженных функций: $F = r\cos\varphi = x,\ \ \hat{F} = \dfrac{\cos\varphi}{r} = x/r^2$, это потенциал диполя (ядро потенциала двойного слоя). Аналогично для сопряженных степеней однородности k и $-k$:

$$F = r^k \cos k\varphi, \quad \hat{F} = \frac{\cos k\varphi}{r^k}.$$

Пусть $n=3$, т.е. мы рассматриваем функции трех переменных и их ограничения на двумерную сферу. В случае $n=3$ имеем $\Lambda = k^2 + k$. Поэтому сопряженная с k степень однородности есть $\hat{k} = -1-k$.

При $k=0$ сопряженные функции $F=1,\ \ \hat{F} = 1/r$.

При $k=1$ имеем $F = z,\ \ \hat{F} = z/r^3$, как и в двумерном случае, это потенциал диполя (ядро потенциала двойного слоя).

При $k=2$ мы можем найти гармоническую квадратичную форму, например, $F = \dfrac{3z^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2},\ \ F|_{S^2} = f = \dfrac{3z^2}{2} - \dfrac{1}{2}$.

Функции z и f являются сферическими, т. е. описывают собственные колебания сферы. Кроме того, это так называемые *зональные* функции: они инвариантны относительно вращений вокруг оси z и меняют знак при переходе через параллели, которые делят сферу на отдельно колеблющиеся зоны, причем разделяющие параллели остаются неподвижными, рис. 11.3.

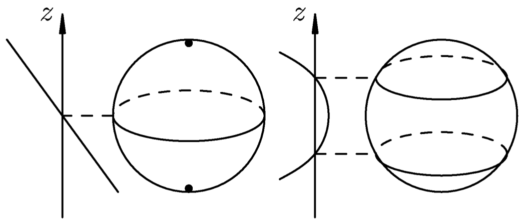

Рис. 11.3. Зональные функции описывают собственные колебания сферы

Задача. При любом ли целом k существует зональная сферическая функция, являющаяся ограничением на сферу многочлена степени k от z?

В общем случае $\Lambda = k^2 + k(n-2)$, сопряженный к k показатель однородности равен $\hat{k} = 2 - n - k$. Значения сопряженных функций в точках rq (q — точка единичной сферы, r — расстояние от начала координат) равны $F(rq) = r^k f(q)$, $\hat{F}(rq) = f(q)/r^{k+n-2}$.

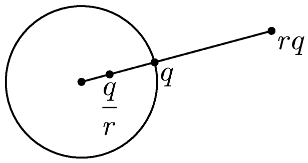

Рис. 11.4. Инверсные точки

Эти значения можно связать при помощи преобразования инверсии. При этом преобразовании точка qr переходит в точку q/r, рис. 11.4.

Имеем: $F(q/r) = f(q)/r^k$, значит $\hat{F}(rq) = = F\left(\frac{q}{r}\right)\frac{1}{r^{n-2}}$ (заметим, что при $n = 2$ инверсия сохраняет гармоничность, а множитель в последней формуле пропадает).

При любом n из формулы связи $F(q/r)$ и $\hat{F}(rq)$ совершенно исчез показатель однородности k. Значит, она верна и для линейных комбинаций однородных функций с разными показателями однородности. Но такими функциями можно приблизить любую гармоническую. Таким образом, при этом преобразовании всякая гармоническая функция F переходит в гармоническую функцию $\hat{F}(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} F\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ (можно это проверить и явным вычислением).

Предложение 1. *Однородные гармонические функции степени k существуют только при целых k. (Собственные функции сферического лапласиана существуют только при Λ, соответствующих целым k.)*

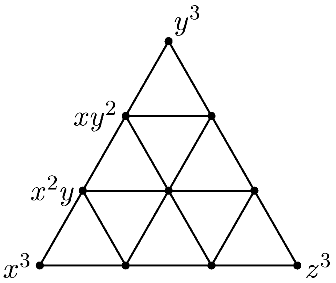

Рис. 11.5. Определение размерности пространства однородных многочленов степени 3

Доказательство. Изучим сначала однородные гармонические многочлены. Пространство однородных многочленов нулевой степени одномерно, степени 1 имеет размерность n, размерность пространства многочленов степени 2 и выше найдем для простоты в трехмерном случае (см. рис. 11.5):

степень	0	1	2	3
размерность	1	3	6	10

Вообще, $\dim S^k\mathbb{R}^3 = C_{k+2}^2 = \dfrac{(k+2)(k+1)}{2}$. Оператор Лапласа переводит это пространство в пространство $S^{k-2}\mathbb{R}^3$ однородных многочленов степени на 2 меньше, чем исходная. Гармонические однородные многочлены степени k образуют линейное пространство — ядро отображения

$$\Delta\colon\ S^k\mathbb{R}^3 \to S^{k-2}\mathbb{R}^3.$$

Утверждение. *Лапласиан отображает $S^k\mathbb{R}^3$ на $S^{k-2}\mathbb{R}^3$.*

Действительно, любой многочлен есть образ некоторого многочлена под действием лапласиана. (Достаточно проверить это для одночленов. Для одночленов от одной переменной x это очевидно: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^p$ при $u = x^{p+2}/(p+2)(p+1)$. Для одночлена $x^p y^q$ от x и еще m переменных y_i начинаем с одночлена $u = x^{p+2}y^q/(p+2)(p+1)$. Имеем $\Delta_{x,y}u = x^p y^q + v$, где $v = \Delta_y u$ — многочлен, степень которого по y меньше $|q|$. Поэтому $x^p y^q$ лежит в образе $\Delta_{x,y}$, если все многочлены степени меньше $|q|$ по y в нем лежат. Это позволяет доказывать требуемое индукцией по $|q|$ (если $\Delta_{x,y}w = v$, то $\Delta_{x,y}(u-w) = x^p y^q$).)

Итак, размерность пространства сферических функций степени k равна разности размерностей пространств $S^k\mathbb{R}^3$ и $S^{k-2}\mathbb{R}^3$, т. е.

$$\frac{(k+2)(k+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = 2k+1.$$

Следствие. *Для каждого неотрицательного целого k на сфере S^2 существует $(2k+1)$-мерное линейное пространство сферических функций — собственных функций сферического лапласиана с собственным числом $-\Lambda$, $\Lambda = k^2 + k$, — являющихся ограничениями гармонических однородных многочленов степени k в $\mathbb{R}^3$ на сферу.*

Доказательство. Собственность ограничений следует из доказанного тождества. Размерность пространства гармонических в $\mathbb{R}^3$ однородных многочленов степени k только что подсчитана. Размерность пространства их ограничений на сферу такая же, так как равный на сфере нулю однородный многочлен равен нулю тождественно.

Мы нашли размерность пространства гармонических однородных многочленов степени k для $n = 3$. В общем случае его размерность растет как k^{n-2}.

Утверждение. *Сферические функции с разными собственными числами попарно ортогональны.*

Действительно, собственные колебания с разными собственными частотами всегда ортогональны, как главные оси эллипсоида в евклидовом пространстве с разными длинами.

Отсюда следует, например, что $\int\limits_{S^2} (3z^2 - 1)\, dz = 0$. Конечно, этот интеграл можно и явно вычислить при помощи симметризации: три таких интеграла для x, y, z равны между собой, а в сумме дают 0.

Теорема. *Всякая сферическая функция (собственная функция сферического лапласиана) является ограничением на сферу однородного гармонического многочлена в объемлющем пространстве.*

Доказательство. Собственные числа сферического лапласиана неположительны, так как потенциальная энергия — интеграл Дирихле — неотрицательна.

Нулевому собственному числу отвечают гармонические на сфере собственные функции. Гармоническая на сфере функция — константа (по принципу максимума), так как сфера — замкнутое (не имеющее края и компактное) связное многообразие. (Действительно, вырежем малую дыру, тогда максимум будет достигаться на границе дыры. Стягивая дыру в точку, убеждаемся, что значение функции, гармонической на замкнутом связном многообразии, в любой его точке равно максимуму этой функции по всему многообразию.)

Теперь рассмотрим любое отрицательное собственное число $-\Lambda$, $\Lambda > 0$. Для любого $\Lambda > 0$ существует показатель однородности $k > 0$ такой, что $\Lambda = k(k+n-2)$, рис. 11.6.

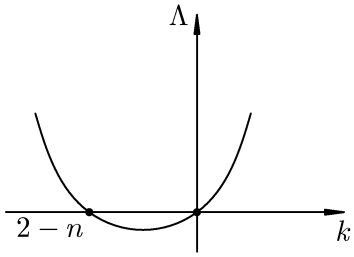

Рис. 11.6. Собственное число как функция степени

Собственная функция сферического лапласиана с собственным числом $-\Lambda$ продолжается на все пространство без 0 в виде гармонической однородной функции степени k (по нашему основному тождеству).

Поскольку k положительно, продолженная функция в окрестности нуля ограничена. По доказываемой ниже теореме об устранимой особенности гармоническая в окрестности нуля ограниченная функция остается гармонической при продолжении в начало координат по непрерывности. Для продолженной функции имеем $u(0) = 0$, поскольку $u(rq) = r^k u(q),\ \ k > 0$.

Продолженная функция в нуле гармоническая и, следовательно, гладкая. Но гладкая в нуле однородная функция степени k — обязательно однородный многочлен степени k (причем k обязательно целое неотрицательное) — это видно из формулы Тейлора. Итак, любая сферическая функция продолжается до однородного гармонического во всем пространстве многочлена.

Теорема Максвелла. *Все сферические функции степени k при $n = 3$ можно получить последовательным дифференцированием функции $1/r$ вдоль k направлений.*

Доказательство. Во-первых, очевидно, что производная гармонической функции вдоль постоянного векторного поля гармонична. Например, частные производные гармонической функции гармоничны.

Во-вторых, на сфере производные совпадают с некоторыми однородными многочленами. Для исходной функции $1/r$ это так: 1 — однородный многочлен степени ноль.

Допустим, что после a дифференцирований получена функция вида F/r^a, где F — однородный многочлен степени d. При дифференцировании вдоль постоянного поля однородность сохраняется, степень понижается на 1. Пусть ∇_v — дифференцирование вдоль постоянного поля $\vec{v}$. Тогда

$$\nabla_v \frac{F}{r^a} = \frac{\nabla_v F \cdot r^a - Fa \cdot r^{a-2}(\vec{v}, \vec{r})}{r^{2a}} = \frac{(\nabla_v F) r^2 - aF(\vec{v}, \vec{r})}{r^{a+2}}.$$

Числитель — однородный многочлен степени $d+1$. Поэтому получающаяся гармоническая функция после ограничения на единичную сферу совпадает с однородным многочленом. Этот многочлен гармонический. Действительно, после дифференцирования мы получим гармоническую однородную функцию отрицательной степени. Показатель ее однородности сопряжен к показателю однородности числителя, являющегося однородным многочленом положительной степени. При ограничении однородной гармонической функции на сферу получается сферическая функция. Если продолжить ее с сопряженным положительным показателем однородности, то получится гармонический во всем пространстве многочлен (по предыдущей теореме). Итак, ограничение нашей производной на сферу совпадает с ограничением на нее некоторого однородного гармонического во всем пространстве многочлена. Можно доказать (см. приложение 1), что пространство функций, получающихся таким образом, линейно (это вовсе не очевидно).

Чтобы доказать, что таким образом получатся все сферические функции, достаточно показать, что в пространстве сферических функций нет собственных подпространств, инвариантных относительно всех вращений. Тогда подпространство, полученное конструкцией Максвелла (оно инвариантно относительно вращений), совпадает со всем пространством сферических функций.

Для доказательства неприводимости представления группы вращений сферы S^2 линейными преобразованиями $(2k+1)$-мерного пространства сферических функций (т. е. отсутствия нетривиальных инвариантных подпространств) достаточно, например, убедиться, что все это пространство состоит из линейных комбинаций одной единственной функции и ее поворотов. В качестве такой порождающей все пространство сферической функции можно взять, например, зональную сферическую функцию. Исследуем эти функции несколько подробнее.

Мы имеем два способа продолжать сферические функции до однородных гармонических функций. Рассмотрим случай конструкции

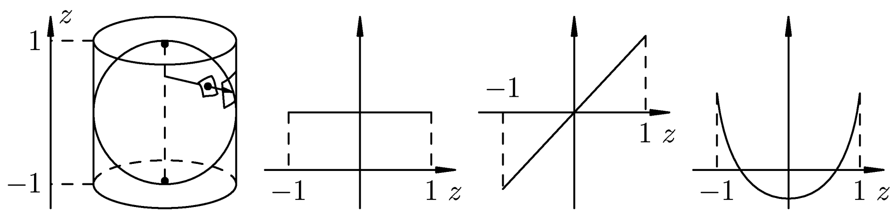

Рис. 11.7. Симплектоморфизм Архимеда сферы на цилиндр и графики первых трех многочленов Лежандра

Максвелла, когда все дифференцирования производятся по одному и тому же направлению, например, вдоль оси z. Ограничивая функции $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k \frac{1}{r}$ на сферу, будем получать сферические функции. При $k = 0$ имеем 1, при $k = 1$ получим z/r^3; каждый раз будем получать выражение вида

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial z}F\right) r^2 - aFz\right) / r^{a+2}.$$

Если $F = F(z,r)$, то при наших дифференцированиях такой вид F сохраняется, поэтому на единичной сфере получится функция только от z. Значит, *в пространстве сферических функций любой степени k есть функция, зависящая только от z.* Она является ограничением на сферу некоторого многочлена от z, который называется *многочленом Лежандра.* Многочлены Лежандра разных степеней попарно ортогональны на отрезке $[-1,1]$ оси z, так как равный нулю интеграл по сфере от их произведения превращается просто в интеграл по dz по теореме Архимеда о симплектоморфизме сферы без полюсов и цилиндра (элемент площади сферы равен элементу площади описанного цилиндра при проектировании на цилиндр горизонтальными радиусами, рис. 11.7).

Следствие. *Многочлен Лежандра степени k имеет на интервале $(-1,1)$ k различных корней.*

Действительно, число нулей не больше k, так как многочлен имеет степень k. Предположим, что число корней меньше k. Тогда число m корней на интервале $(-1,1)$, в которых многочлен меняет знак, тем более меньше k. Составим линейную комбинацию из многочленов Лежандра степени не выше m, которая обращается в 0 первого порядка в

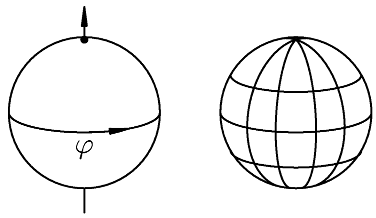

Рис. 11.9. Колебания сферы, соответствующие присоединенным функциям

этих m нулях. Такая линейная комбинация существует, так как линейные комбинации многочленов Лежандра степени не выше m — это в с е многочлены степени m (пространство многочленов имеет размерность $m + 1$, а первые $m + 1$ многочленов Лежандра линейно независимы). Умножим построенную линейную комбинацию на наш многочлен Лежандра степени k. Произведение не меняет знака на интервале $(-1, 1)$. Это противоречит ортогональности многочленов Лежандра степени k многочленам Лежандра меньших степеней.

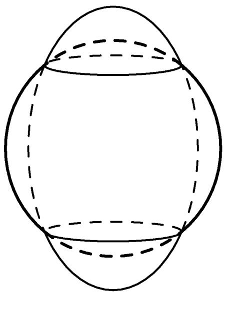

Рис. 11.8. Колебание сферы, соответствующее многочлену Лежандра

Итак, число различных корней многочлена Лежандра степени k на интервале $(-1, 1)$ равно k. Следовательно, все корни — простые.

Каждый многочлен Лежандра описывает зональное собственное колебание сферы, рис. 11.8.

Кроме многочлена Лежандра f степени k, то же собственное число имеют еще присоединенные функции $f_j(z)\cos j\varphi$, $f_j(z)\sin j\varphi$ $(j < k)$, которые также описывают собственные колебания, рис. 11.9; каждая долька в сетке колеблется отдельно.

Присоединенные функции можно получить из многочлена Лежандра, поворачивая сферу вокруг оси x или оси y на малый угол α. Многочлен Лежандра превращается при этом в близкую сферическую функцию. Присоединенная функция измеряет разность между исходной и сдвинутой функцией. А именно, производная сдвинутой функции по α и является присоединенной сферической функцией: $(x(\partial/\partial z) - z(\partial/\partial x))f(z) = xf'(z) = f'(z)\sqrt{1-z^2}\cos\varphi$. При повторных дифференцированиях появляются $\cos 2\varphi$, и т. д. Эти вычисления доказывают, между прочим, что все сферические функции порождаются одной зональной, и, следовательно, доказывают неприводимость (отсутствие инвариантных подпространств).

В частности, отсюда вытекает, что конструкция Максвелла дает все сферические функции.

Можно доказать (см. ниже приложение 1), что пространство k-кратных производных от функции $1/r$ по k постоянным (и, следовательно, коммутирующим) векторным полям линейно (производная линейно зависит от поля). Размерность этого линейного пространства производных не превосходит $2k+1$, так как ненулевое k-кратное дифференцирование задается направлениями k векторов (k точками на 2-сфере) и еще одним общим множителем.

С другой стороны, мы построили выше линейное отображение этого линейного пространства размерности $2k+1$ на все $(2k+1)$-мерное пространство гармонических однородных многочленов степени k в $\mathbb{R}^3$. Значит, это отображение — изоморфизм. Следовательно, конструкция Максвелла не только дает все сферические функции с данным k, но они получаются, с точностью до множителя, по одному разу. Тем самым доказано топологическое утверждение:

$$S^k(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{R}P^{2k}.$$

Теория сферических функций имеется в любой размерности, в любой размерности есть зональные функции. При $n = 3$ это полиномы Лежандра. Посмотрим, что получится при $n = 2$.

Колебания окружности описываются собственными функциями

$$\cos k\varphi,\ \ \sin k\varphi.$$

Существование зональных колебаний означает, что из этих двух функций можно составить линейную комбинацию, зависящую только от z. Но это очевидно: такой функцией является функция $z = \cos\varphi$, а также функция $\cos k\varphi$ при любом k, рис. 11.10.

Следствие. $\cos k\varphi = T_k(\cos\varphi)$, *где* T_k — *многочлен.*

Эти многочлены называются *многочленами Чебышева.* Они ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, правда, с весом (посчитайте, с каким), и имеют аналогичные свойствам нулей полиномов Лежандра свойства нулей.

Между прочим, роль присоединенных функций здесь играют функции $\sin k\varphi$, получающиеся из зональных дифференцированиями по углу поворота зональной функции.

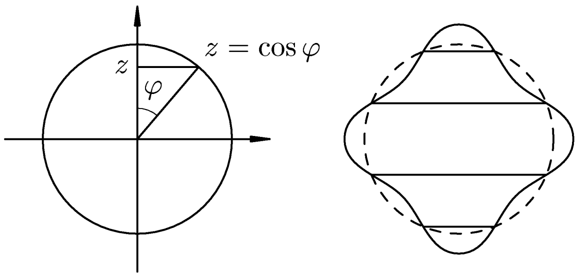

Рис. 11.10. Зональные колебания окружности

Большинство так называемых специальных функций математической физики возникает в задаче о колебаниях тел с той или иной симметрией в пространстве какой-либо размерности.

Например, задача о колебаниях круга приводит к так называемым функциям Бесселя. Бессель — немецкий астроном, встретивший эти функции при разложении гравитационного потенциала Солнца, ограниченного на кеплеров эллипс, в ряд Фурье.

Тот факт, что столь различные физические задачи, как задача о колебаниях круга и о притяжении планет, приводят к одной и той же математической теории, является удивительным проявлением универсальности математики и единства всего сущего.

Чтобы закончить доказательство поразительной теоремы Максвелла, остается доказать использованную в нем (и также поразительную) теорему об устранимой особенности.

Теорема. *Пусть $n = 2$. Если функция в $\mathbb{R}^n$ гармонична в некоторой проколотой окрестности точки и ограничена, то она продолжается по непрерывности в эту точку, и продолженная функция гармонична и в полной окрестности точки, включая саму точку.*

Эта теорема имеет простой физический смысл. Гармоническая функция описывает стационарное состояние мембраны, натянутой на некоторый контур. Например, мембрану можно натянуть на два колечка. Теорема утверждает, что нельзя мембрану подпереть в одной точке иголкой, иголка пройдет насквозь, рис. 11.11.

В случае тонкой пластинки, которая описывается уравнением $\Delta^2 u = 0$, соответствующее утверждение неверно, т. е. пластинку можно подпереть в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим окружность с центром в рас-

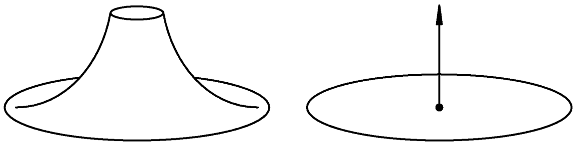

Рис. 11.11. Мембрану можно подпереть колечком, но нельзя иголкой

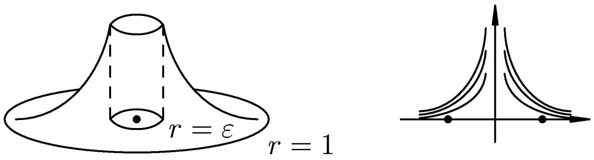

Рис. 11.12. Метод барьера устранения особенности

сматриваемой точке 0 (сдвинув и растянув координаты, можно считать, что окружность задается условием $r=1$). Построим гармоническую функцию в круге, совпадающую на окружности с нашей функцией. Мы уже знаем, что такая функция существует (явная формула — интеграл Пуассона — указана в лекции 7). Надо доказать, что разность между исходной и построенной функциями, обозначим ее u, равна нулю в проколотом круге.

Рассмотрим функцию $u_0 = C\ln(1/r)$. Она гармонична в проколотом круге и равна нулю на окружности $r=1$. Подберем C так, чтобы при $r=\varepsilon$ эта функция была больше u.

Функция u в проколотом круге ограничена; пусть там $|u| \leqslant M$. Чтобы при $r=\varepsilon$ функция u_0 была равна M, выберем $C = \dfrac{M}{\ln(1/\varepsilon)}$. Тогда на единичной окружности $u=u_0=0$, а на окружности радиуса ε $u \leqslant u_0$. В кольце между окружностями обе функции гармоничны, а на обеих границах $u \leqslant u_0$. По принципу максимума гармоническая в кольце функция $u_0 - u$ неотрицательна всюду в кольце, рис. 11.12. Итак,

$$0 \leqslant u \leqslant \frac{M\ln(1/r)}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

Такому же неравенству удовлетворяет и функция $-u$.

Пусть $\varepsilon \to 0$. Тогда во всех точках круга получаем $u=0$, рис. 11.12.

Аналогичное доказательство проходит и в случае, когда в нуле особенность слабее логарифмической. Примененный метод устранения особенности называется методом барьера. Сущность метода состоит в том, чтобы найти положительную гармоническую функцию вне особенности, стремящуюся к бесконечности при подходе к особенности.

Умножив такую «барьерную» функцию на подходящую константу, ее можно сделать сколь угодно малой в любой точке вне особенности. Если исследуемая функция стремится к бесконечности при подходе к особенности медленнее, чем барьерная функция, то особенность устранима: на краях кольца исследуемая функция меньше (не больше) барьерной, поэтому она по модулю меньше (не больше) ее везде и поэтому равна нулю.

Теорема об устранимой особенности верна в любой размерности; особенность должна быть слабее, чем у фундаментального решения. Доказательство совершенно такое же, как при $n = 2$, только вместо $C\ln(1/r)$ нужно поставить $C(r^{n-2} - 1)$.

Следствие. *Ограниченная гармоническая функция на плоскости постоянна.*

Замечание. Этот результат, принадлежащий Лиувиллю, справедлив и в $\mathbb{R}^n$ при любом n, но приведенное ниже простое доказательство проходит только при $n = 2$.

Доказательство. Сфера Римана при помощи стереографической проекции покрывается двумя плоскими картами, которые связаны между собой преобразованием $w = 1/z$. Рассмотрим нашу функцию $u(z)$ в карте w, там она гармонична и ограничена в окрестности нуля. По теореме об устранимой особенности она ограничена и гармонична на всей сфере Римана, а значит, постоянна.

Замечание. Достаточна даже ограниченность с одной стороны: например, всякая положительная гармоническая на всей плоскости функция постоянна.

Задача. Если гармоническая на плоскости функция растет не быстрее многочлена, то она является многочленом.

Указание. Производные такой функции растут не быстрее многочлена. Отсюда, ввиду уравнений Коши – Римана, следует, что голоморфная функция f, вещественной частью которой является исходная гармоническая функция, растет не быстрее некоторого многочлена. Значит, голоморфная в некоторой проколотой окрестности $z = \infty$ (т.е. $w = 0$) функция $f(z)/z^N = w^N f(1/w)$ ограничена. Из теоремы об устранимой особенности следует, что она голоморфна при $w = 0$, поэтому f — многочлен степени не выше N.

Задача. Устранима ли особенность ограниченной функции, гармонической в дополнении к отрезку в $\mathbb{R}^3$?

Указание. В качестве барьера взять потенциал заряда плотности 1 на отрезке.

Задача. Доказать теорему Лиувилля в $\mathbb{R}^n$: ограниченная гармоническая функция постоянна.

Указание. Воспользоваться формулой Пуассона или разложением в ряд по сферическим функциям на большой сфере.