# Лекция 12.

# Краевые задачи для уравнения Лапласа. Теория линейных уравнений и систем

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ компактную связную гладкую гиперповерхность $S^{n-1}$, делящую $\mathbb{R}^n$ на две области: внутреннюю (ограниченную) область $G$ и внешнюю (неограниченную) область $G'$. Пусть на границе задана непрерывная функция $f$: $S^{n-1} \to \mathbb{R}$. Краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа заключается в следующем: ищем в замыкании области $G$ ($G'$) функцию $u$, для которой выполняются условия

1) функция $u$ гармонична: $\Delta u = 0$ в области $G$ (внутренняя задача) или $G'$ (внешняя задача),

2) функция непрерывна в замыкании области: $u \in C(\bar{G})$ (соответственно, $C(\bar{G'})$),

3) функция удовлетворяет граничному условию $u|_{S^{n-1}} = f$.

4) В случае внешней задачи рассматриваются также некоторые дополнительные условия на бесконечности, влияющие на существование и единственность решения. Эти условия в разных учебниках ставятся по-разному. Наиболее обычно (выглядящее на пер-

вый взгляд странным) условие

$$|u| < C \quad \text{при } x \to \infty, \ \ n = 2;$$
$$u \to 0 \quad \text{при } x \to \infty, \ \ n > 2.$$

Задачей Неймана называется задача, в которой третье условие имеет вид $\dfrac{\partial u}{\partial n} = f$, тогда во втором условии надо потребовать гладкость на границе класса $C^1$ или какое-нибудь другое достаточное условие существования нормальной производной.

В случае задачи Неймана тоже обычно накладываются условия типа 4). Физически краевое условие Дирихле 3) соответствует закрепленной по краю мембране, а условие Неймана $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ — свободной.

Комбинируя варианты внутренняя — внешняя, Дирихле — Неймана, получаем всего 4 типа краевых задач. Рассмотрим все по порядку.

**1. Внутренняя задача Дирихле.**

Решение существует и единственно.

Например, при $n = 2$ интеграл Пуассона дает решение задачи Дирихле в круге. Произвольную область по теореме Римана можно конформно отобразить на круг, а значит, получить и в ней решение задачи Дирихле. К сожалению, доказательство теоремы Римана основано на существовании решения задачи Дирихле. К тому же этот прием не работает в больших размерностях. Тем не менее результат верен в любой размерности: существует единственное решение задачи Дирихле.

Результат сохраняется и в случае плоской или многомерной области, ограниченной несколькими связными поверхностями. Единственность сразу следует из принципа максимума (см. предыдущие лекции). Идея доказательства существования заключается в минимизации интеграла Дирихле при заданных граничных условиях. Этот минимум может достигаться, как мы уже знаем, только на решении задачи Дирихле. Он действительно достигается. Физически это достаточно очевидно (стационарное состояние натянутой на контур мембраны). Но доказательство нетривиально, встречаются тонкости. Например, для мембраны, подпертой в одной точке, нижняя грань интеграла Дирихле не достигается (см. теорему об устранимой особенности в лекции 10). Мы не будем доказывать существование минимума.

**2. Внешняя задача Дирихле.**

Ее можно свести к внутренней. Для этого надо сделать инверсию с центром в некоторой точке области. Если эту точку принять за начало координат, то инверсия задается формулой $x \mapsto x/|x|^2$. При $n = 2$ гармонические функции переходят в гармонические. При $n > 2$ гармонической будет функция $\dfrac{1}{|x|^{n-2}}\, u\Big(\dfrac{x}{|x|^2}\Big)$. Новую функцию мы рассматриваем в ограниченной области, в которую перешла внешность $G$ при инверсии, рис. 12.1, и ставим для нее внутреннюю задачу Дирихле.

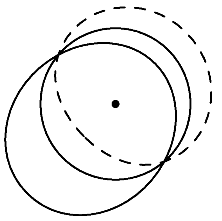

Рис. 12.1. Преобразование областей при инверсии

Видно, что может появиться особенность в нуле. Но если исходная функция во внешности $G$ ограничена, то особенность устранима. Итак, ограниченное решение внешней задачи Дирихле существует и единственно. При $n > 2$ оно стремится к 0 на бесконечности, так как при возвращении ко внешней области ограниченное решение внутренней задачи будет поделено на растущую на бесконечности величину $|x|^{n-2}$.

Неограниченное решение неединственно. Например, при $n = 2$, если граница — окружность $r = 1$, то к ограниченному решению можно добавить фундаментальное (растущее на бесконечности) решение с любым коэффициентом (оно равно нулю на границе). Можно добавлять и другие гармонические функции, например $r\cos\varphi$, $\cos\varphi/r$ и т. п. Если не наложить условия 4), то получим бесконечномерное пространство решений.

Условие 4) при $n > 2$ выбирается так, чтобы преобразованная функция $\dfrac{1}{|x|^{n-2}}\, u\left(\dfrac{x}{|x|^2}\right)$, поделенная на фундаментальное решение $1/|x|^{n-2}$, стремилась к 0 при $|x| \to 0$. Тогда к преобразованной функции применима теорема об устранимой особенности, и внешняя задача Дирихле сводится к внутренней. Так получается условие $u \to 0$ при $x \to 0$.

### 3. Внутренняя задача Неймана.

Пусть сначала $n = 2$. Гармоническая функция является вещественной частью голоморфной. Мнимая часть этой голоморфной функции — гармоническая функция, сопряженная к нашей. Условия Коши – Римана означают, что производная нашей искомой функции по нормали к границе равна про-

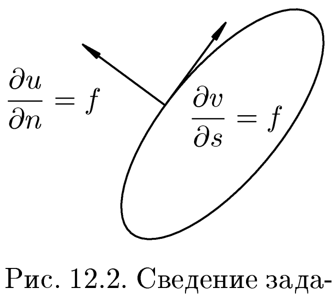


Рис. 12.2. Сведение задачи Неймана к задаче Дирихле

изводной сопряженной функции по ортогональному направлению, рис. 12.2.

Получаем, что задана производная сопряженной функции $v$ вдоль границы. Если бы по этой производной удалось восстановить саму $v$ на границе, то задача Неймана для функции $u$ свелась бы к задаче Дирихле для функции $v$. Но восстановить $v$ по производной удается не всегда, к этому могут быть препятствия топологического характера. Например, если граница топологически есть окружность с координатой $s$ на ней, то необходимым и достаточным условием возможности восстановления $v$ по $f = \partial v/\partial s$ является условие $\oint\limits_{\partial G} f\,ds = 0$. В случае неодносвязной области, например кольца, для разрешимости задачи требуется тоже о д н о условие: интеграл от граничной функции по границе кольца равен нулю. Не возникает двух условий типа «интеграл по каждой окружности равен нулю», как можно было бы ожидать (поучительно подумать, почему это так!). Итак, получается следующий результат.

**Теорема.** *Внутренняя задача Неймана разрешима тогда и только тогда, когда* $\oint\limits_{\partial G} f\,ds = 0$. *Решение единственно с точностью до аддитивной константы. Таким образом, пространство решений одномерно.*

**Замечание.** Рассмотрим линейный оператор $A\colon X \to Y$. В пространстве $X$ имеется подпространство $\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора $A$, а в пространстве $Y$ подпространство $\operatorname{Im} A$ — образ оператора $A$.

Число $k = \dim \operatorname{Ker} A$ есть число линейно независимых решений однородного уравнения $Au = 0$, а число $s = \operatorname{codim} \operatorname{Im} A$ есть число независимых условий, которые надо наложить на правую часть неоднородного уравнения $Au = f$, чтобы обеспечить разрешимость.

Обозначим также $c = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} A$, $\;i = \dim \operatorname{Im} A$. Имеем: $c + k = \dim X$, $\;i + s = \dim Y$. Кроме того, выполняется равенство $c = i$ (фактор по ядру отображается на образ изоморфно). Значит, $k - s = \dim X - \dim Y$.

Мы видим, что число $k - s$, называемое индексом оператора $A$, на самом деле не зависит от оператора, а определяется пространствами.

Рис. 12.3. Нормальная производная гармонической функции не может быть положительной

Иногда это наблюдение удается обобщить на бесконечномерные пространства. Это можно сделать при условии, что $A$ достаточно хорошо приближается конечномерными операторами. В наших приложениях $X, Y$ будут функциональными пространствами, потребуется достаточно хорошая аппроксимация конечными суммами рядов Фурье.

Посмотрим с этой точки зрения на наши краевые задачи.

В случае внутренней задачи Дирихле $s = 0$, $k = 0$, $s - k = 0$.

В случае внутренней задачи Неймана $s = 1$, $k = 1$, $s - k = 0$. Оказывается, в обеих задачах речь идет об отображении одних и тех же пространств.

Необходимость условия $\oint\limits_{\partial G} f\,ds = 0$ для разрешимости внутренней задачи Неймана можно получить и исходя из соображений минимизации интеграла Дирихле. При $n = 2$ очевидно, например, что нормальная производная не может быть положительной на всей границе, иначе нарушится принцип максимума, рис. 12.3. Если производная положительна, то появится особенность не меньше логарифмической, рис. 12.3.

**Задача.** Проведите интегрирование по частям в интеграле Дирихле $\int\limits_G (\nabla u)^2 dx$ в многомерном случае и убедитесь, что условие $\oint\limits_{\partial G} f\,ds = 0$ необходимо для разрешимости внутренней задачи Неймана.

**4. Внешняя задача Неймана.**

В двумерном случае внешнюю задачу можно свести к внутренней (в многомерном это не удается). Заметим, что при условии $\partial u/\partial n = 1$ на граничной окружности $r = 1$ внутренняя задача неразрешима, а внешняя имеет решение $\ln(1/r)$. Любую функцию на границе можно представить в виде суммы константы и функции с нулевым интегралом по границе. Инверсией можно свести внешнюю задачу к внутренней: производная по внешней нормали переходит в производную по внутренней нормали. Это верно для произвольной области: инверсия — конформное отображение, нормаль к граничной прямой переходит в нормаль к ее образу при инверсии.

Окончательный результат: без ограничения 4) решение не единственно; при условии 4) решение единственно, причем существует тогда и только тогда, когда $\oint\limits_{\partial G} f\,ds = 0$.

То же верно в бо́льших размерностях. При этом $s = 1$, $k = 1$, $k - s = 0$.

Доказательства всех перечисленных результатов о существовании и единственности решений краевых задач строятся следующим методом. Решение ищем в виде потенциала с неизвестной плотностью. Для этой плотности получается интегральное уравнение, разрешимость которого и доказывается.

Рассмотрим, например, внутреннюю задачу Дирихле. Решение ищем в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью $\rho$ на границе. Обозначим значение потенциала на границе через $A\rho$, где $A$ — линейный (интегральный) оператор из пространства функций на границе в себя. По теореме о скачке потенциала двойного слоя предельное значение потенциала внутри области при подходе к границе есть $A\rho + \lambda\rho$, где $\lambda$ — постоянная, зависящая лишь от размерности (она равна $\pi$ в двумерном и $2\pi$ в трехмерном случае). Граничное условие Дирихле $u|_{\partial G} = f$ принимает поэтому вид уравнения $(A + \lambda E)\rho = f$ для плотности $\rho$.

Если бы пространство плотностей было конечномерным, мы сразу решили бы это уравнение: $\rho = (A + \lambda E)^{-1}$. Существование обратного оператора гарантируется тогда отсутствием ненулевого решения у однородного уравнения.

Единственность решения уравнения $(A + \lambda E)\rho = 0$ следует из принципа максимума, так как равная на границе области $G$ нулю непрерывная в замыкании этой области и гармоническая внутри функция везде равна нулю. Поэтому, если бы пространство функций $\rho$ было конечномерным, существование решения задачи Дирихле было бы доказано.

На самом деле это пространство бесконечномерно, но оператор $A$ настолько хорошо аппроксимируется конечномерными, что вывод сохраняется.

Причина, по которой оператор $A$ почти что конечномерен, состоит в следующем. Оператор переводит плот-

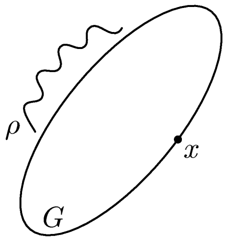


Рис. 12.4. Высокая гармоника дает малый вклад в значение потенциала в точке границы

ность $\rho$ в значение потенциала на границе. Рассмотрим на границе точку $x$, рис. 12.4.

Разложим плотность в ряд Фурье. Высокая гармоника этого ряда быстро осциллирует. Физически это означает наличие близких зарядов с противоположными знаками. Они действуют противоположно, поэтому такая гармоника вносит малый вклад в результат в точке $x$. Поэтому оператор $A$ хорошо приближается конечномерными. Благодаря этому индекс оператора $A + \lambda E$ равен нулю, как для оператора из конечномерного пространства в себя, хотя этот оператор и действует в бесконечномерном пространстве плотностей.

В многомерном случае для сферической границы можно использовать вместо разложения Фурье разложение по сферическим функциям. Для других граничных многообразий используются аналогичные рядам Фурье локальные разложения вблизи каждой точки.

На этом мы заканчиваем наше краткое обсуждение вопросов существования и единственности решений основных краевых задач для уравнения Лапласа. Для аккуратного доказательства сформулированных результатов нужен аппарат теории интегральных уравнений Фредгольма, для построения которого в этих лекциях нет времени. Краткое его изложение имеется, например, в учебнике Г. Е. Шилова «Введение в теорию линейных пространств».

## Линейные уравнения с частными производными и их символы

Вернемся к общей теории дифференциальных уравнений. Напомню вначале общее понятие линеаризации. Начнем с обыкновенного дифференциального уравнения, заданного векторным полем $v$ в фазовом пространстве. Пусть $x_0$ — положение равновесия дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$, т. е. $v(x_0) = 0$. Тогда в окрестности точки $x_0$ можно поставить задачу о малых колебаниях вокруг положения равновесия, описываемых линеаризованной системой: $\dot{y} = Ay$, $A = \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x_0}$, рис. 12.5.

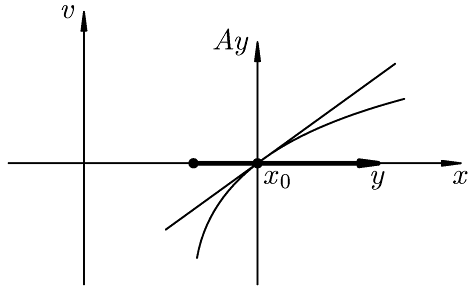


Рис. 12.5. Линеаризация в окрестности положения равновесия

Замена уравнения $\dot{x} = v(x)$ уравнением $\dot{y} = Ay$ называется *линеаризацией* системы в точке $x_0$. Линеаризованное векторное поле живет в касательном пространстве исходного фазового пространства в положении равновесия. Оно не зависит от системы координат, используемой при вычислении матрицы Якоби $\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x_0}$.

В случае уравнений с частными производными такое происхождение имеет задача о малых колебаниях сплошной среды (струны, мембраны и т. п.). Это линеаризация соответствующего уравнения динамики сплошной среды, имеющего фазовым пространством бесконечномерное пространство положений и скоростей точек среды. В линеаризованных задачах о малых колебаниях сплошной среды роль оператора $A$ играют линейные операторы с частными производными, причем они могут быть как угодно высокого порядка.

Неизвестная функция может быть не скалярной, а векторной (представьте себе, например, струну в трехмерном пространстве: ее отклонение от равновесного состояния в каждой точке — вектор, имеющий 2 компоненты, координаты в нормальном струне направлении).

Для описания подобных ситуаций в общем виде следует рассмотреть векторное расслоение, база которого — многообразие независимых переменных. Значения неизвестных функций («полей», как говорят физики) определяют сечение этого расслоения. При локальном изучении можно записать все в координатах и считать, что $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$. В физике компоненты вектора $u$ называются полями, $r$ — число полей, $n = D + 1$, где $D$ — физическая размерность, единица отводится на время.

Линейный дифференциальный оператор в системе координат $(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид многочлена от операторов $\partial/\partial x_i$ с зависящими от $x$ коэффициентами, т. е. вид

$$P(\partial, x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x)\partial^\alpha,$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$
$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Число $m = \max|\alpha|$ называется порядком оператора. Такой оператор действует на скалярные функции ($r = 1$). Если полей несколько ($r > 1$), то обычно возникают «матричные» дифференциальные операторы со значениями в векторном расслоении над той же базой, что и исходные поля. Обычно размерность слоя — такая же, как число исходных полей $r$, т. е. число уравнений равно числу неизвестных функций. В локальных координатах оператор $u \mapsto v$ записывается в виде системы

$$\begin{aligned} &v_1 = P_{11}(\partial, x)u_1 + \ldots + P_{1r}(\partial, x)u_r \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &v_r = P_{r1}(\partial, x)u_1 + \ldots + P_{rr}(\partial, x)u_r. \end{aligned}$$

Обозначим $\mathcal{P}(\partial, x)$ всю матрицу из операторов $P_{jl}(\partial, x)$, получим короткую матричную запись $v = \mathcal{P}(\partial, x)u$. Здесь $\mathcal{P}$ — матрица из многочленов от $\partial/\partial x_i$ с зависящими от $x$ коэффициентами.

**Пример.** Уравнения Коши – Римана имеют вид

$$0 = \begin{pmatrix} \partial_x & -\partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

здесь $r = 2$, матрица кососимметрическая, степень многочленов $m = 1$, их коэффициенты — постоянные.

Рассмотрим, более общим образом, важный частный случай, когда дифференциальные операторы $\mathcal{P}$ инвариантны относительно сдвигов по $x$, т. е. когда все коэффициенты $a_\alpha(x)$ постоянны.

Происхождение этого случая такое. Если известно, что поля меняются плавно, то при локальном изучении можно в первом приближении применить операцию замораживания коэффициентов, т. е. переход к уравнениям с постоянными коэффициентами, равными значениям коэффициентов в рассматриваемой точке. Для медленно меняющихся полей замораживание дает достаточно хорошее приближение.

Итак, рассмотрим операторы с постоянными коэффициентами: $A = \mathcal{P}(\partial)$. Оказывается, такие уравнения решаются, причем получается чисто алгебраическая теория. Пусть, для простоты, $r = 1$ (рассмативется одно уравнение с одной неизвестной функцией).

Рассмотрим сдвиги $T_s\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T_s x = x+s$. Операторы $A = \mathcal{P}(\partial)$ и $T_s$ действуют на функции и коммутируют между собой: $A\,T_s = T_s\,A$. Значит, они имеют общие собственные векторы. Какие собственные функции у сдвигов? Считаем, что наши функции комплекснозначные.

На окружности функции представляются рядами Фурье. Чем длиннее сворачиваемый в окружность отрезок, тем ближе расположены частоты, участвующие в представлении. А именно, для отрезка длины $L$ участвуют частоты $\varkappa = 2\pi l/L$, рис. 12.6.

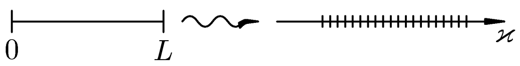


Рис. 12.6. В разложение Фурье входят близкие частоты

Следует ожидать, что при растягивании отрезка на всю прямую ряд превратится в интеграл; тем самым мнимые экспоненты образуют «континуальный базис»: $e^{ikx}$, $k$ пробегает двойственное пространство $(\mathbb{R}^n)^*$ (в физике $k$ называется волновым вектором). Функции $e_k = e^{ikx}$ называют (гармоническими) плоскими волнами, они являются собственными функциями операторов сдвига и дифференцирования:

$$T_s e_k = \lambda_k e_k, \quad \lambda_k = e^{iks}, \quad \partial^\alpha e_k = (ik)^\alpha e_k.$$

Мы видим, что $Ae_k = P(ik)e_k$, т. е. каждая гармоническая плоская волна является собственной функцией любого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, причем собственное число — многочлен от волнового вектора.

В случае $r$ полей вычисления аналогичны: домножив экспоненту на амплитуду $w \in \mathbb{R}^r$, получим $\mathcal{P}(\partial)we_k = (\mathcal{P}(ik))we_k$. Здесь $\mathcal{P}(ik)$ — матрица, элементы которой — многочлены.

**Упражнение.** Найдите эту матрицу для оператора Коши–Римана.

О т в е т: $\begin{pmatrix} ik_1 & -ik_2 \\ ik_2 & ik_1 \end{pmatrix}$.

Для каждого волнового вектора $k$ и каждого дифференциального оператора $P(\partial)$ с постоянными коэффициентами имеется, вообще говоря, $r$ собственных векторов $w_j$ оператора $P(ik)$. Каждый из них определяет гармоническую плоскую волну с волновым вектором $k$ вида $w_j e_k$, являющуюся собственным вектором матричного дифференциального оператора $A = \mathcal{P}(\partial)$. Физически плоские волны $w_j e_k$ с данным волновым вектором $k$ имеют общие фронты, но различные «поляризации» $w_j \in \mathbb{R}^r$.

При $r = 1$ имеем один дифференциальный оператор $P(\partial)$, полином $P(ik)$ от волнового вектора $k$ называется *символом* этого оператора. Старший член символа называется *главным символом.*

Например, символ оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$ равен $-k_1^2 - \ldots - k_n^2$ и совпадает с его главным символом. Символ обычно обозначают буквой $\sigma$, например, для оператора Лапласа $\sigma = -k^2$.

Для матричного оператора матрица из символов называется *матричным символом* оператора.

*Символом системы* называется определитель матричного символа. Например, символ системы Коши – Римана равен

$$\det \begin{pmatrix} ik_1 & -ik_2 \\ ik_2 & ik_1 \end{pmatrix} = -k_1^2 - k_2^2,$$

т. е. совпадает с символом оператора Лапласа на плоскости.

*Главным символом системы* называется главная однородная часть ее символа. В физике волн соответствующее понятие обычно называется дисперсионным соотношением.

**Замечание.** Главный символ определен инвариантно, т. е. не зависит от системы координат, использованной для его построения: он является однородным многочленом от компонент кокасательного вектора $k$ пространства независимых перменных. Инвариантность главного символа означает независимость от системы координат его значения на каждом кокасательном векторе. Полный символ не инвариантен. Например, у оператора Лапласа после замены переменных могут добавиться члены первого порядка. Можно усмотреть инвариантность главного символа из следующих соображений (для простоты ограничимся скалярным случаем, $r = 1$). Подействуем оператором на гармоническую плоскую волну $e_k$:

$$P(\partial, x)\, e_k = \sigma_m(k) + \sigma_{m-1}(k) + \ldots,$$

где коэффициенты полиномов могут зависеть от $x$. Пусть $k \to \infty$. Если $\sigma_m \neq 0$, то это главный член асимптотики значения оператора на высокочастотной плоской волне. Сделав в функции $e_k(x)$ гладкую замену переменной $x$, легко проверить, что эта асимптотика зависит лишь от вектора $k$, но не от системы координат.

Алгебраические свойства главного символа оказывают решающее влияние на свойства соответствующего дифференциального уравнения, и в этом смысле теория дифференциальных уравнений может рассмтриваться как ветвь алгебраической геометрии.

**Пример.** Пусть функцию $f$ на многообразии можно разложить в ряд по экспонентам (например, на окружности, торе): $f = \sum f_k e_k$. Ищем решение уравнения $\Delta u = f$ в виде ряда $u = \sum u_k e_k$. Получаем $-k^2 u_k = f_k$, $u_k = -f_k/k^2$. Очевидно, что ряд $\sum u_k e_k$ сходится, более того, гладкость $u$ возросла на два порядка по сравнению с гладкостью $f$.

То же рассуждение проходит для любого линейного оператора порядка $m$ с постоянными коэффициентами, если $|\sigma_m(k)| \geqslant C|k|^m$.

Такой оператор называется *эллиптическим*. Мы видим, что из-за эллиптичности бесконечномерность задачи фактически исчезает, способ решения чисто алгебраический.

Оператор с переменными коэффициентами называется *эллиптическим*, если он становится эллиптическим при замораживании коэффициентов в любой точке.

**Пример.** Оператор Лапласа $\operatorname{div}\operatorname{grad}$ на любом римановом многообразии (например, на поверхности сферы) — эллиптический (докажите!).

Для эллиптического оператора $P(\partial, x)$ с переменными коэффициентами предыдущие формулы не дают точного решения уравнения $Pu = f$. Однако, замораживая коэффициенты, можно получить достаточно хорошее приближение к решению эллиптического уравнения $Pu = f$ на компактном многообразии.

Выбирая в качестве $f$ «волновые пакеты» вроде $f = e^{-sx^2} e_k(x)$, можно использовать при больших $k$ приближенное решение $u =$

$= f/\sigma_m(k)$. Быстрое убывание $u$ при $k \to \infty$ гарантирует «почти конечномерность» задачи. Из-за этого теория эллиптических уравнений и краевых задач даже и в случае переменных коэффициентов почти столь же близка к конечномерной линейной алгебре, как и соответствующие теории для оператора Лапласа, с которыми мы познакомились выше.

Если оператор не эллиптический (например, волновой), то этот способ непосредственно не пройдет, но можно его модифицировать.

**Задача 1.** Найти многообразие нулей главного символа волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

О т в е т. Это квадратичный конус в $\mathbb{R}^3$ («световой конус»).

**Задача 2.** Пусть квадратичная форма $\sum a_{pq}k_pk_q$ положительно определена. При каких значениях скорости $c$ и волнового вектора $k$ волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum a_{pq}\frac{\partial^2 u}{\partial x_p \partial x_q}$$

имеет решение вида плоской волны $e^{\omega t - kx}$, бегущей в направлении вектора $k$ со скоростью $c$?

**Задача 3.** Найдите многообразие нулей главного символа системы уравнений Максвелла

а) в вакууме:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{rot} H, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\operatorname{rot} E,$$

б) в однородной неизотропной среде.

У к а з а н и е. См. книгу Куранта и Гильберта «Уравнения математической физики».

**Задача 4.** Найти многообразие нулей главного символа системы уравнений Дирака для четырех комплексных функций $u_j$ четырех переменных $x_i$:

$$\sum_{k=1}^{4} \alpha_k(\partial/\partial x_k - a_k)u - \beta b u = 0,$$

где

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Общая схема теории распространения волн, определяемых системами линейных уравнений с частными производными, такова.

Множество нулей главного символа является полем конусов в кокасательных пространствах пространства-времени. Переходя к проективизации (или к сферизации), мы получаем «гиперповерхность Френеля» медлительностей в многообразиях контактных элементов пространства-времени.

Геометрическая оптика (т. е. теория лучей и фронтов), заданная этой гиперповерхностью (см. лекцию 2), приближенно описывает (при некоторых условиях) коротковолновые асимптотики (в физике называемые также квазиклассическими), т. е. поведение волн, длина которых мала по сравнению с геометрическими размерами системы (например, с расстояниями, на которых заметно меняются коэффициенты системы).

Основным из условий является условие *гиперболичности*, которое состоит в следующем. Рассмотрим алгебраическую гиперповерхность степени $d$ в $m$-мерном вещественном проективном пространстве. Гиперповерхность называется *гиперболической* по отношению к точке, если каждая вещественная прямая, проходящая через эту точку, пересекает гиперповерхность в $d$ *вещественных* точках. Если все эти точки попарно различны, то поверхность называется *строго гиперболической*.

**Пример.** Эллипс строго гиперболичен относительно своих внутренних точек, нестрого гиперболичен относительно граничных точек и не гиперболичен относительно внешних точек.

Условие гиперболичности системы состоит в том, что гиперповерхность медлительностей в проективном пространстве контактных элементов в каждой точке пространства-времени должна быть гиперболической относительно временно́й точки.

Здесь времення́я точка — это проективизация вектора $dt$ кокасательного пространства к пространству-времени (соответствующий контактный элемент — касательная гиперплоскость изохроны).

Строго гиперболическая поверхность четной степени $2n$ состоит из $n$ диффеоморфных сфере и расположенных один внутри другого овалоидов — от ближайшего к временно́й точке до самого далекого. Физически эти компоненты соответствуют различным «модам» или типам волн, способных распространяться в данной среде. Например, в упругой среде бывают продольные и поперечные волны. Продольная и поперечная волны, распространяющиеся в одном и том же направлении, имеют, вообще говоря, разные скорости.

Ближайший к временно́й точке овалоид соответствует самой медленной волне, следующий — более быстрой, и т. д. до приходящей первой, самой быстрой волны, соответствующей самому внешнему из овалоидов. Это видно из того, в каком порядке идут точки пересечения соответствующих конусов с вершиной $O$ с времяподобной мировой линией $q = c$, расположенной рядом с $O$. Ближайшая к изохроне точка пересечения соответствует наименьшему времени $t$ прихода возмущения из $O$ в $c$ и, следовательно, самой быстрой волне.

Следует иметь в виду, что каждому направлению соответствуют две волны одного типа: одна распространяется вперед, а другая назад (соответствующие волновые векторы противоположны).

**Пример.** Для волнового уравнения $2n = 2$, мода одна, и каждому направлению в физическом пространстве соответствуют ровно две волны, распространяющиеся по этому направлению в противоположные стороны.

Обоснование коротковолновых асимптотик и, в частности, перехода «физической» оптики волновых уравнений в геометрическую оптику уравнения эйконала выходит за рамки этих лекций. Замечу только, что последовательное проведение этой программы приводит к появлению в асимптотических формулах интересных топологических инвариантов — так называемых индексов Маслова, описывающих «потерю четверти волны при прохождении луча у каустики» и проявляющихся в квантовой механике в виде поправки (1/2) к условию квантования Бора–Зоммерфельда. Общая формулировка условий квантования приводит, таким образом, к топологическому объекту — характеристическому классу Маслова на лагранжевых подмногообразиях симплектического фазового пространства.

**Задача.** Перенести формулу Вейля (асимптотику числа собственных функций с собственными числами, меньшими $E$) на случай гиперболических систем.