Лекция 2.

Общая теория для одного уравнения первого порядка (продолжение)

Мы рассматриваем общее дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка $F(x, y, p) = 0$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $y = u(x)$ — неизвестная функция. Уравнение задает $2n$-мерную гиперповерхность V^{2n} в пространстве J^1 1-струй функций от $(x_1, \dots, x_n)$. Каждая функция имеет 1-график в J^1; она является решением уравнения, если ее 1-график Γ^n есть подмногообразие в V^{2n}.

В каждой точке из J^1 имеется контактная плоскость K^{2n}, заданная в локальных координатах уравнением $dy = p\,dx$; геометрически она представляет собой замыкание объединения касательных плоскостей ко всем 1-графикам, проходящим через данную точку.

В точках поверхности V^{2n} касательная плоскость к V^{2n} пересекается с контактной плоскостью. Если пересечение $(2n-1)$-мерно, то точка регулярная, иначе — особая. В общем положении особые точки изолированны. В регулярных точках z получаем распределение $(2n-1)$-мерных плоскостей $(T_z V^{2n}) \cap K_z^{2n}$, которые являются подпространствами контактных плоскостей K_z^{2n}.

Каждая контактная плоскость является симплектическим пространством, симплектическая структура задается дифференциальной

2-формой $\omega^2 = d\alpha|_{K^{2n}}$, где $\alpha = dy - p\,dx$.

В координатах имеем $\omega^2 = dx \wedge dp := \sum\limits_{i=1}^{n} dx_i \wedge dp_i$; (x, p) служат координатами в контактной плоскости.

Лемма. *Форма ω^2 невырожденна.*

Доказательство. Ее матрица в координатах $x_1, p_1, x_2, p_2, \ldots$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Итак, форма ω^2 задает в K^{2n} кососкалярное произведение, к каждому подпространству в K^{2n} определено косоортогональное дополнение, которое имеет дополнительную размерность. В частности, косоортогональное дополнение к $(2n-1)$-мерному пересечению $(T_zV^{2n}) \cap \cap K_z^{2n}$ одномерно. Это направление называется *характеристическим для уравнения.*

Задача 1. Докажите, что характеристическая прямая лежит в $(T_zV^{2n}) \cap K_z^{2n}$.

Вычислим явно в терминах уравнения компоненты характеристического вектора. Пусть (x, y, p) — координаты в T_zJ^1. Характеристический вектор должен быть касательным к V^{2n}: дифференцируя уравнение, получаем первое условие

$$F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_p\dot{p} = 0. \tag{2.1}$$

Далее, вектор должен лежать в контактной плоскости, отсюда второе условие

$$\dot{y} = p\dot{x}. \tag{2.2}$$

Исключив $\dot{y}$ из этих двух уравнений, получим уравнение $(2n-1)$-мерного пересечения K^{2n-1} касательной и контактной плоскостей:

$$(F_x + F_yp)\dot{x} + F_p\dot{p} = 0. \tag{2.3}$$

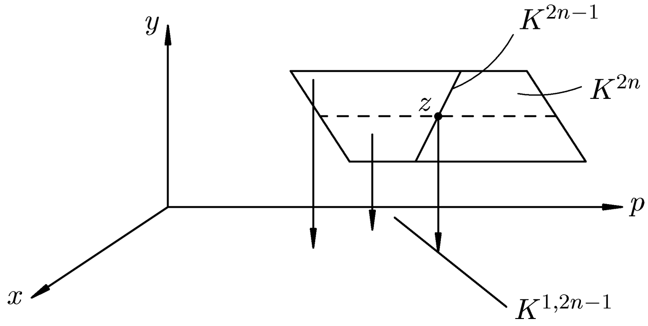

Рис. 2.1. x, p служат координатами в контактной плоскости

Это уравнение записано в координатах (x, p), которые мы можем считать координатами в контактной плоскости, поскольку она взимно однозначно проектируется на гиперплоскость (x, p) в J^1, рис. 2.1.

Нам осталось найти косоортогональное дополнение к K^{2n-1}. Задачу в принципе можно решить алгоритмически, записав соответствующую систему линейных уравнений, но мы воспользуемся одним полезным наблюдением.

Для примера рассмотрим случай $n = 1$, тогда значение кососкалярного произведения $dx \wedge dp$ на паре касательных векторов $(\dot{x}, \dot{p}), (x', p')$ есть просто определитель из их координат:

$$dx \wedge dp\,\big((\dot{x}, \dot{p}), (x', p')\big) = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{p} \\ x' & p' \end{vmatrix} = \dot{x}p' - x'\dot{p}.$$

Оказывается, то же самое верно в общем случае, если под x, p понимать векторы, а произведение рассматривать как скалярное.

Задача 2. Докажите, что

$$\omega^2\,\big((\dot{x}, \dot{p}), (x', p')\big) = \dot{x}p' - x'\dot{p}. \tag{2.4}$$

Но посмотрим внимательно на уравнение (2.3). Оно само имеет вид (2.4), т. е. выражает факт, что кососкалярное произведение равно 0. Так что прямо из него мы выпишем вектор косоортогонального дополнения к K^{2n-1}: $p' = F_x + pF_y$, $x' = -F_p$. Правда, по традиции характеристическим называют противоположно направленный вектор. В итоге мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Характеристическим является поле направлений следующего векторного поля:* $x' = F_p$, $p' = -(F_x + pF_y)$, $y' = pF_p$ (последняя компонента находится из (2.2)).

Заметим, что поле определяется самой функцией F, а не только ее нулевой поверхностью уровня, а значит, задано во всем пространстве J^1.

Пример 1. Пусть F не зависит от y. Соответствующее уравнение называется *уравнением Гамильтона – Якоби.* Традиционное обозначение $F = H(x,p)$. Уравнение Гамильтона – Якоби — это уравнение вида $H(x, \partial u/\partial x) = 0$. Уравнения характеристик имеют вид

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p' = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad y' = p\frac{\partial H}{\partial p}. \tag{2.5}$$

Первые два уравнения — это обычные канонические уравнения Гамильтона (этим и диктуется выбор знака характеристического поля, указанный выше: для гамильтониана свободной частицы массы 1 $H = p^2/2$; при выбранном знаке получаем $x' = p$, т. е. импульс равен скорости).

Спроектировав систему (2.5) на подпространство с координатами (x, p), получим отдельную систему уравнений в этом пространстве. Тем самым мы осуществили факторизацию или расщепление исходного уравнения (2.5). Это векторное поле в пространстве (x, p) можно задать и инвариантно, не прибегая к координатам. Поверхность исходного уравнения в J^1 была цилиндрической, не менялась в зависимости от y, такая поверхность хорошо проектируется в пространство (x, p). Гамильтоново поле задано не только на нулевой поверхности уровня H, а всюду. Функция H обычно имеет физический смысл энергии.

Пусть, например, $H = (p^2 - 1)/2$, тогда уравнение имеет вид $p^2 = 1$ или $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 1$, т. е. это уравнение эйконала геометрической оптики.

Система уравнений характеристик $x' = p$, $p' = 0$ описывает движение частиц по прямолинейным лучам с постоянной скоростью, рис. 2.2.

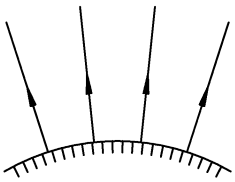

Рис. 2.2. Характеристики уравнения эйконала

Если на многообразии задана риманова метрика, то характеристики уравнения эйконала оказываются геодезическими этой метрики.

Пример 2. Рассмотрим уравнение Эйлера $u_t + uu_x = 0$. При $n = 2$ пространство 1-струй J^1 пятимерно, $F(t, x, y, p_t, p_x) = p_t + yp_x$. Запишем систему уравнений характеристик:

$$\begin{array}{ll} p_t' = -p_x p_t, & t' = 1, \\ p_x' = -p_x^2, & x' = y, \end{array} \quad y' = p_t + p_x y = 0.$$

Первые два уравнения есть так называемые сопряженные уравнения эволюции производных, пока мы ими заниматься не будем. Займемся оставшимися. Переменная t имеет смысл времени, остальные уравнения перепишем в виде $dx/dt = y$, $dy/dt = 0$, откуда $d^2x/dt^2 = 0$, т. е. уравнение характеристик оказалось уравнением Ньютона, см. предыдущую лекцию.

Теперь применим характеристики к решению уравнения в общем случае.

Теорема 2. *Пусть Γ^n — 1-график решения, пусть характеристика проходит через точку графика. Тогда она вся лежит на Γ^n, т. е. график решения можно расслоить на характеристики.*

Доказательство. Рассмотрим регулярную точку z, пусть ξ — вектор характеристического направления в точке z. Очевидно следующее:

1. $T_z\Gamma^n \subset T_zV^{2n}$, поскольку Γ — подмногообразие в V^{2n}.

2. $T_z\Gamma^n \subset K_z^{2n}$ по определению K_z^{2n}, поэтому $T_z\Gamma^n \subset (T_zV^{2n}) \cap \cap (K_z^{2n})$. Заметим, что само пространство $T_z\Gamma^n$ n-мерно.

3. Все векторы из $T_z\Gamma^n$ попарно косоортогональны. Действительно, $\alpha|_{\Gamma^n} = 0$, так как Γ^n — 1-график, поэтому $d\alpha|_{\Gamma^n} = 0$, т. е. $\omega^2|_{\Gamma^n} = 0$.

Упражнение. Убедитесь, что в координатной записи равенство формы $\omega^2|_{\Gamma^n}$ нулю вытекает из симметричности смешанных частных производных.

Определение. Подпространство симплектического пространства, все векторы которого попарно косоортогональны, называется *изотропным* (по Ли — «сумасшедшим»).

Например, на симплектической плоскости всякая прямая изотропна.

Лемма. *В $2n$-мерном симплектическом пространстве размерность изотропного подпространства не превосходит n.*

(Изотропные подпространства максимальной размерности существуют и называются *лагранжевыми* подпространствами. Пример лагранжева подпространства — прямая на симплектической плоскости.)

Доказательство леммы. Пусть изотропное подпространство m-мерно. Как изотропное, оно содержится в своем косоортогональном дополнении, значит, размерность косоортогонального дополнения не меньше m. Имеем: $2n - m \geqslant m$, $m \leqslant n$. Лемма доказана.

Теперь вернемся к характеристическому вектору ξ в точке z.

Утверждение. *Вектор ξ лежит в $T_z\Gamma^n$.*

Допустим противное. Тогда, будучи характеристическим, ξ косоортогонален $T_zV^{2n} \cap K_z^{2n}$. В силу 2, ξ косоортогонален $T_z\Gamma^n$. Но тогда линейная оболочка ξ и $T_z\Gamma^n$ $(n+1)$-мерна и изотропна ввиду 3, все это противоречит лемме.

Итак, характеристическое направление в каждой точке касается 1-графика решения, а значит вся характеристика лежит на графике. Теорема доказана.

Отсюда вытекает рецепт построения 1-графиков решений (заметим, что существование хотя бы одного решения пока не доказано). Надо взять $(n-1)$-мерное изотропное подмногообразие поверхности V^{2n}, не касательное к характеристике, и провести через его точки характеристики, получив локально 1-график решения. Чтобы получился действительно график, нужно, чтобы плоскость, натянутая на касательную плоскость к изотропному подмногообразию и характеристическое направление, взаимно однозначно проектировалась на x-пространство.

Имеется стандартный способ построения начальных изотропных многообразий. Рассмотрим в x-пространстве $(n-1)$-поверхность γ^{n-1}. Пусть на ней задана начальная функция u_0. Подставим эти данные в уравнение и рассмотрим его как уравнение относительно p. Производные по касательным к γ^{n-1} направлениям нам уже заданы. Производную по трансверсальному направлению можно найти из уравнения по теореме о неявной функции, если F'_p в рассматриваемой точке не касается начальной гиперповерхности γ^{n-1}. Таким образом получим $(n-1)$-мерное изотропное начальное подмногообразие; данные такого типа называются данными Коши, подробности см. в [1, § 8, пп. K, M].

Теорема 3. *Рассмотрим начальное* $(n-1)$*-мерное подмногообразие* $V^{n-1} \subset V^{2n}$*, не касательное к характеристике; пусть* n*-мерная плоскость, натянутая на его касательную плоскость и характеристическое направление, изоморфно проектируется на* x*-пространство. Проведем через его точки характеристики. Тогда локально получим* 1*-график решения* (см. рис. 2.3).

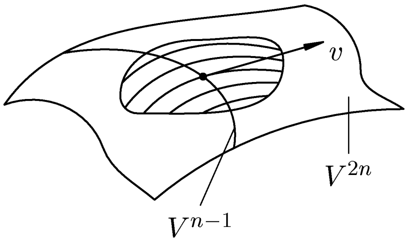

Рис. 2.3. Построение 1-графика решения

Доказательство. Подмногообразие V^{n-1} изотропно: $d\alpha|_{T_z V^{n-1}} = 0$. Проведя через все его точки в окрестности регулярной точки z характеристики, получим n-мерное подмногообразие Γ^n в V^{2n}. Докажем, что $d\alpha|_{\Gamma^n} = 0$. Пусть v — векторное поле характеристических направлений. По формуле гомотопий $L_v\alpha = i_v\, d\alpha + d(i_v\alpha)$, где $i_v\, d\alpha(\xi) := d\alpha(v,\xi)$, а $i_v\alpha = \alpha(v)$. Очевидно, $i_v\alpha = 0$, а $i_v\, d\alpha(\xi) = d\alpha(v,\xi) = 0$ для всякого вектора ξ, касательного к V^{2n}, по определению характеристического направления. Итак, производная формы по направлению поля v на V^{2n} равна 0, поэтому фазовый поток характеристического поля переводит форму в себя. Это значит, что значение формы на любом векторе равно значению этой же формы на векторе, перенесенном назад на начальное многообразие.

Отсюда следует, что $d\alpha$ тоже переводится полем v в себя. В начальной точке пространство $T_z\Gamma^n$ изотропно (V^{n-1} изотропно, а v — характеристический). Фазовым потоком поля v это свойство переносится в любую точку z' многообразия Γ^n: пространство $T_{z'}\Gamma^n$ изотропно. Итак, $\alpha|_{\Gamma^n} = 0$. Значит, Γ^n — интегральное подмногообразие контактной структуры. Таким образом, Γ^n — лежандрово подмногообразие. И по построению Γ^n — подмногообразие уравнения. Остается доказать, что локально это 1-график. Это вытекает из следующей общей теоремы.

Теорема 4. *Пусть* n*-мерная поверхность* Γ^n *в пространстве* 1*-струй является лежандровой (интегральной для контактной*

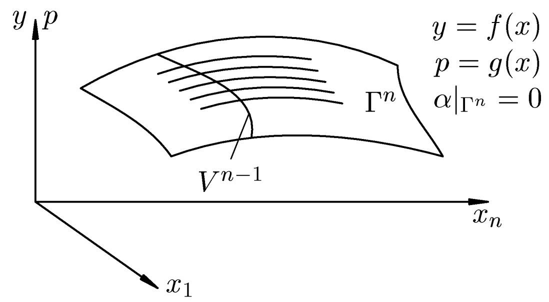

Рис. 2.4. Интегральная поверхность как 1-график

структуры) и локально взаимно однозначно проектируется на x-пространство. Тогда локально это 1*-график.* (См. рис. 2.4.)

Доказательство. Запишем условие лежандровости $\alpha|_{\Gamma^n} = 0$ (поверхность — интегральная для контактной структуры):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i - \sum_{i=1}^{n} g_i\, dx_i = 0\right) \Longrightarrow \left(g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\right),$$

поскольку x_i — локальные координаты на Γ^n. Но это и означает, что Γ^n — 1-график.

Пример. Решим задачу Коши для уравнения Эйлера $u_t + uu_x = 0$. Обычно в качестве начальной кривой на плоскости (x,t) выбирают прямую $t = 0$. Зададим начальную функцию $y = u_0(x)$, рис. 2.5.

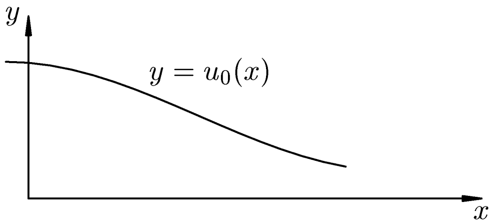

Рис. 2.5. Начальное условие для уравнения Эйлера

Уравнения характеристик: $t' = 1$, $y' = 0$, $x' = y$; условия трансверсальности выполнены. Заметим, что для квазилинейного уравнения все можно рассматривать в пространстве J^0, поскольку характеристики квазилинейного уравнения в J^0 являются проекциями «настоящих» характеристик из J^1, рис. 2.6.

Итак, будем рассматривать 0-график в J^0. Нарисуем на плоскости (x,y) серию сечений графиков при $t = \mathrm{const}$, рис. 2.7. Значения решения в последующие моменты получаются переносом начальных значений вдоль характеристик.

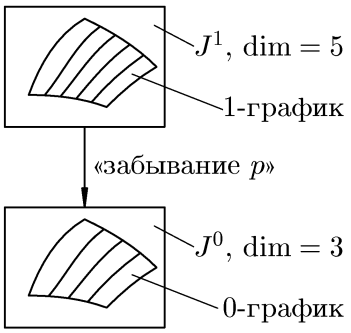

Рис. 2.6. Характеристики квазилинейного уравнения в J^0 суть проекции характеристик из J^1

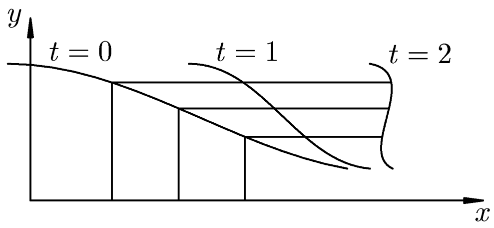

Рис. 2.7. Графики решения уравнения Эйлера в последовательные моменты времени

Мы видим, что начиная с некоторого момента кривая перестает быть графиком. Интегральная поверхность уравнения перестает взаимнооднозначно проектироваться на плоскость (x, t). Кривая критических значений проектирования имеет точку возврата, рис. 2.8.

Физически уравнение Эйлера описывает эволюцию поля скоростей невзаимодействующих частиц. Эта модель хороша, например, для описания звездных потоков, нарушение единственности решения можно трактовать как свободное прохождение разных потоков друг сквозь друга.

С другой стороны, при больших плотностях частицы начинают сталкиваться, и после некоторого времени уравнение Эйлера перестает выполняться. Его заменяют на другое уравнение, учитывающее взаимодействие, например, на уравнение Бюргерса $u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}$. При малых ε его решения приближают решения уравнения Эйлера до критического времени, а при больших значениях времени имеют тип ударных волн: график u почти вертикален в малой (порядка ε) окрестности движущейся точки, рис. 2.9.

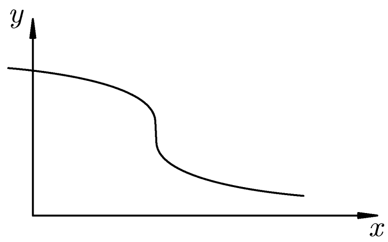

Рис. 2.9. Решения типа ударной волны

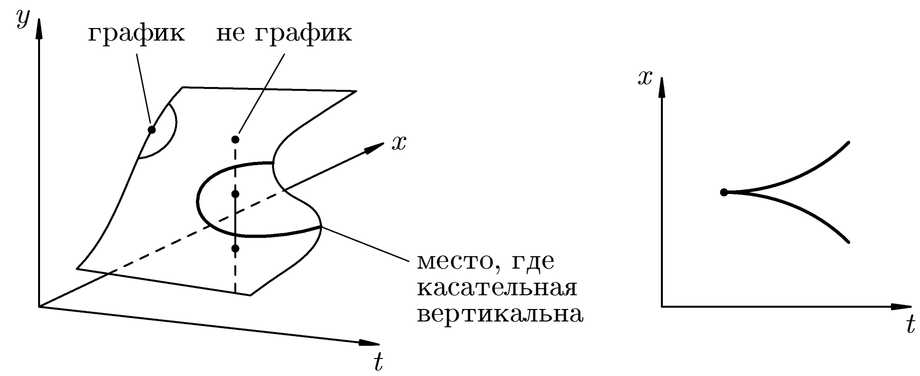

Рис. 2.8. а) Интегральная поверхность перестает быть графиком. б) Кривая критических значений проектирования.

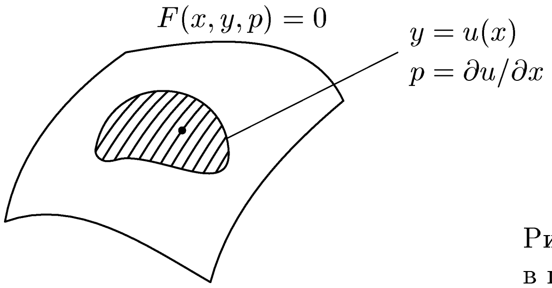

Рис. 2.10. 1-график решения в пространстве 1-струй

Справа и слева от этой точки решения также близки к решениям уравнения Эйлера. Замечательно, что уравнение Бюргерса явно решается — оно сводится к уравнению теплопроводности, которое мы рассмотрим позже.

Замечание. 1-график решения уравнения первого порядка состоит из характеристик гиперповерхности, задающей уравнение в пространстве 1-струй, рис. 2.10.

Таким образом, мы свели уравнение поля к уравнениям движения частиц. Но, как заметил Якоби, можно применить теорему в обратном направлении: свести уравнения движения частиц к уравнению поля. Это бывает полезно, поскольку системы уравнений движения частиц, как правило, явно не решаются.

Если мы найдем хотя бы одно решение уравнения поля (УРЧП), мы будем знать лежандрово подмногообразие, составленное из характеристик. Если найдем еще решение уравнения поля, то наложим еще условие на характеристики, размерность интегрального многообразия-пересечения понизится на 1. Если удастся найти достаточно много решений, будем понижать размерность интегрального многообразия. Если известно достаточно большое (но конечнопараметрическое) семейство решений УРЧП, то все характеристики можно получить, пересекая соответствующие лежандровы многообразия до тех пор, пока не выделим саму (одномерную) характеристику.

Это метод Якоби интегрирования обыкновенных уравнений путем их представления как уравнений характеристик некоторого УРЧП.

Якоби применил его к решению гамильтоновых систем — систем уравнений характеристик для уравнения Гамильтона – Якоби (F не зависит явно от y). Результатом явилась, например, знаменитая теорема Лиувилля об интегрировании гамильтоновых систем, для которых известна полная система интегралов в инволюции.

Замечательно, что этот метод удалось «поднять» для интегрирования уже уравнений с частными производными! Для этого их надо рассматривать как бесконечномерные гамильтоновы системы. Таким образом удалось проинтегрировать известные уравнения Sine Gordon, Кортевега – де Фриза и др., см. [2, Добавление 16].

Но из нашего замечания следует, что метод Якоби можно применять к более широкому классу систем, чем гамильтоновы, а именно к тем, которые суть уравнения характеристик некоторого УРЧП. Правда, про конкретное векторное поле трудно бывает узнать, является ли оно характеристическим для какого-либо уравнения. Соответствующая теория, по-видимому, до сих пор не развита, во всяком случае я не знаю ее приложений к физически интересным задачам.

Литература

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1989.