Лекция 3.

Принцип Гюйгенса в теории распространения волн

Рассмотрим пространство-время $M^{n+1} = B^n \times \mathbb{R}$, где B^n — «физическое пространство», а $\mathbb{R}$ — «ось времени». [Бо́льшая часть дальнейшего буквально переносится на случай расслоения $M^{n+1} \to \mathbb{R}$ над осью времени, а многое — также на случай, когда роль времени играет слоение на «изохроны» или даже нули незамкнутой дифференциальной формы «dt» на M].

В геометрической оптике (а также в вариационном исчислении и в теории оптимального управления) в каждой точке многообразия M задан *конус возможных скоростей движения*.

Пример. Пусть B — риманово многообразие. Графики всевозможных «движений» $q\colon \mathbb{R} \to B$ со скоростью единица в каждой точке касаются квадратичного конуса (который и задает риманову метрику) $\|dq\| = |dt|$. Таким образом, M снабжено полем лоренцевских квадратичных конусов.

Касательные плоскости конуса возможных направлений в точке m, являющейся его вершиной, принадлежат проективизации кокасательного пространства к M в этой точке, $PT^*_m M \approx \mathbb{R}P^n$.

Часто полезно снабжать эти касательные плоскости коориентациями (указывающими направление распространения возмущения). Ориентированные касательные плоскости конуса возможных скоростей принадлежат сферизации ST_m^*M кокасательного пространства пространства-времени M. Эта сферизация диффеоморфна сфере S^n.

Некоориентированные (коориентированные) гиперплоскости в касательном пространстве многообразия называются *контактными элементами* (*коориентированными контактными элементами*) многообразия. Они образуют многообразие расслоения контактных элементов (коориентированных контактных элементов) $PT^*M \to M$ ($ST^*M \to M$) со слоем $\mathbb{R}P^n$ (S^n), где $n = \dim M - 1$.

Таким образом, поле конусов возможных скоростей определяет гиперповерхность в многообразии контактных элементов пространства-времени (быть может, коориентированных). Эта гиперповерхность в геометрической оптике называется гиперповерхностью Френеля. Она является основным геометрическим объектом геометрической оптики, вариационного исчисления и теории оптимального управления.

Замечание. Векторы пространства, двойственного к пространству скоростей, в теории распространения волн часто называют медлительностями.

Построенная выше гиперповерхность может быть описана как поле конусов в пространстве T^*M медлительностей на пространстве-времени.

На многообразиях контактных элементов любого многообразия (коориентированных или нет) имеется замечательная геометрическая структура — контактная структура. Это поле гиперплоскостей в касательных пространствах многообразия контактных элементов, инвариантно определенное расслоением многообразия контактных элементов над исходным многообразием M.

Такое поле существует и единственно; оно называется *тавтологическим* и определяется следующей конструкцией. Каждая точка пространства расслоения контактных элементов на M является гиперплоскостью в касательном пространстве исходного многообразия M. Прообраз этой плоскости при проектировании пространства расслоения на M и есть гиперплоскость тавтологического поля в исходной точке.

Замечание. Тавтологическая контактная структура задает одно условие на скорость движения контактного элемента. Это условие называется *условием конька.* Смысл этого условия состоит в том, что конек (контактный элемент на плоскости катка) может свободно вращаться на месте и может двигаться в заданном им самим направлении, но сопротивляется при попытке сдвигать его в трансверсальных направлениях.

Рассмотрим интегральные многообразия тавтологической контактной структуры.

Пример 1. Для любой гиперповерхности в M все касающиеся ее контактные элементы образуют интегральное многообразие тавтологической контактной структуры в PT^*M (или в ST^*M, если они коориентированы). Размерность этого интегрального многообразия чуть-чуть (на $1/2$) меньше половины размерности многообразия контактных элементов.

Пример 2. Все контактные элементы, приложенные в одной точке многообразия M, образуют интегральное многообразие тавтологической контактной структуры в PT^*M (или в ST^*M). Размерность этого интегрального многообразия такая же, как размерность интегрального многообразия примера 1.

Пример 3. Для любого подмногообразия (любой размерности) в M все касающиеся его контактные элементы на M образуют интегральное подмногообразие тавтологической контактной структуры в PT^*M (или в ST^*M) такой же размерности, как в примерах 1 и 2.

Задача 1. Докажите, что интегральных подмногообразий бóльшей n размерности многообразие контактных элементов на M^{n+1} с его тавтологической структурой не имеет.

Задача 2. Существуют ли гладкие интегральные подмногообразия размерности n тавтологической контактной структуры на многообразии контактных элементов в M^{n+1}, не получающееся конструкцией примера 3?

Указание. Рассмотрите контактные элементы, касающиеся полукубической параболы $x^2 = y^3$ на плоскости $(n = 1)$.

Определение. Интегральные многообразия максимально возможной размерности (n в контактном многообразии размерности $2n + 1$) называются *лежандровыми.*

Теорема 1 (теория опорных функций). *Многообразие 1-струй функций на сфере S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ (с его естественной контактной структурой) контактно диффеоморфно многообразию коориентированных* *контактных элементов в* $\mathbb{R}^n$ *(с его тавтологической контактной структурой).*

Доказательство. Обозначим через $q \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ точку единичной сферы в евклидовом пространстве. Касательные векторы к сфере в точке q можно считать ортогональными q векторами пространства. Их можно также считать кокасательными, так как евклидова структура отождествляет вектор p с линейной функцией $(p,\cdot)$. Таким образом, 1-струя функции f на S^{n-1} задается тройкой ($q \in S^{n-1}$, $p = df|_q \in \mathbb{R}^n$, $z = f(q)$).

Искомый диффеоморфизм задается формулой

$$Q = q + pz, \quad P = q,$$

где Q — точка приложения контактного элемента $\mathbb{R}^n$, коориентированного нормальным ему вектором P.

Задача. Докажите, что: 1) это действительно диффеоморфизм $J^1(S^{n-1},\mathbb{R}) \approx ST^*\mathbb{R}^n$ $(\approx S^{n-1} \times \mathbb{R}^n)$; 2) он переводит естественную контактную структуру в J^1 в тавтологическую контактную структуру ST^*.

Указание. Посмотрите, во что переходят лежандровы многообразия.

Замечание. Расстояние от начала координат до ортогональной q касательной плоскости выпуклой гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$ называется *значением опорной функции* заданной гиперповерхности в точке $q \in S^{n-1}$. Опорная функция задана на сфере (внешних) нормалей и определяет гиперповерхность.

Функция, заданная на сфере, определяет гиперповерхность в пространстве (огибающую соответствующего функции семейства гиперповерхностей). Эта гиперповерхность, однако, может иметь особенности.

Задача. Рассмотрите кривые, заданные функциями $x^2 + 2y^2 + t$ (где t — параметр) на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Вернемся к гиперповерхности Френеля медлительности фронтов, лежащей в многообразии ST^*M^{n+1} коориентированных контактных элементов пространства-времени.

Определение. *Лучами* (на этой гиперповерхности) называются ее характеристики (т. е. интегральные кривые поля характеристических направлений гиперповерхности).

Напомню, что характеристическое направление гиперповерхности в точке многообразия с контактной структурой (заданной как поле нулей дифференциальной 1-формы α) есть косоортогональное дополнение (в смысле симплектической структуры $d\alpha$ на плоскости $\alpha = 0$ в каждой точке) к пересечению касательной гиперплоскости гиперповерхности с гиперплоскостью контактной структуры.

Пример. Пусть $(q_1, \ldots, q_n)$ — координаты в «физическом пространстве» B^n, $q_0 = t$ — время, $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ — соответствующие компоненты момента. Тавтологическая контактная структура локально задается 1-формой $\alpha = p_0\, dq_0 + p_1\, dq_1 + \ldots + p_n\, dq_n$, где $[\,p_0 : p_1 : \ldots : p_n\,]$ — однородные координаты в $\mathbb{R}P^n$, $q_0 = t$. В аффинных координатах, для которых $p_0 = -1$, $\alpha = -dt + p_1\, dq_1 + \ldots + p_n\, dq_n$. Гиперповерхность медлительностей задается уравнением

$$p_0 = H(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n, t),$$

где H — однородная функция первой степени по переменным p_i. Уравнение характеристик имеет вид

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, \ldots .n).$$

Таким образом, лучи определяются уравнениями Гамильтона, причем функция Гамильтона задается гиперповерхностью медлительностей.

Рассмотрим теперь геометрию распространения волн в среде, в которой локальная скорость распространения возмущений определяется этой гиперповерхностью медлительностей в пространстве контактных элементов пространства-времени.

Типичным примером является семейство эквидистант подмногообразия риманова многообразия. Гиперповерхность медлительностей определяет гиперповерхность второго порядка в каждом проективизированном кокасательном пространстве пространства-времени. Семейство эквидистант (гиперповерхностей, отстоящих на расстояние t от заданной начальной гиперповерхности в физическом пространстве) можно рассматривать как одну гиперповерхность в пространстве-времени (сечения которой различными изохронами $t = \mathrm{const}$ и дают все семейство эквидистант). Аналогичным образом определяется *большой фронт*, описывающий распространение фронтов возмущений единой гиперповерхностью в пространстве-времени с более общей гиперповерхностью медлительностей в многообразии контактных элементов пространства-времени.

Рассмотрим контактные элементы пространства-времени, касающиеся большого фронта. Все они принадлежат гиперповерхности медлительностей (в этом и состоит локальный закон распространения возмущений). Очевидно

Предложение. *Контактные элементы, касающиеся большого фронта, образуют лежандрово подмногообразие тавтологической контактной структуры пространства контактных элементов пространства-времени, проектирующееся на большой фронт и лежащее в гиперповерхности медлительностей.*

Рассмотрим теперь начальное условие, заданное мгновенным фронтом возмущения в момент $t = 0$. Этот фронт определяет подмногообразие коразмерности один в большом фронте, которое также является интегральным для тавтологической контактной структуры многообразия контактных элементов пространства-времени, но которое не лежандрово, так как имеет размерность на 1 меньшую, чем лежандровы подмногообразия.

Это начальное интегральное подмногообразие состоит из контактных элементов пространства-времени, касающихся начального фронта и вдобавок принадлежащих гиперповерхности медлительностей. Именно последнее условие позволяет (при надлежащих условиях невырожденности) выбрать из однопараметрического семейства контактных элементов пространства-времени, содержащих касательное пространство к начальному фронту в данной точке, тот контактный элемент пространства-времени, который касается конуса возможных скоростей.

Основу всей теории распространения возмущений составляет следующий простой и общий факт контактной геометрии (в сущности, открытый Гюйгенсом и заслуживающий поэтому наименования «принцип Гюйгенса»):

Теорема 2. *Лежандрово подмногообразие гиперповерхности в контактном пространстве содержит вместе с каждой точкой всю характеристику этой поверхности, проведенную через эту точку.*

Здесь предполагается, что касательная плоскость к гиперповерхности нигде не совпадает с контактной плоскостью $\alpha = 0$.

Доказательство. Вдоль лежандрова многообразия $\alpha = 0$, поэтому на его касательной плоскости $d\alpha = 0$. Если бы вектор ξ характеристического направления не лежал в этой плоскости, он был бы ей косоортогонален в смысле формы $d\alpha$, и мы получили бы, присоединив ξ к касательной плоскости лежандрова многообразия, косоортогональную себе плоскость в симплектическом линейном пространстве $\alpha = 0$, размерность которой больше половины размерности пространства. Это невозможно, поэтому характеристические направления касаются лежандрова многообразия, что и утверждалось.

Следствие. *Лежандрово многообразие, соответствующее большому фронту, получается из начального условия следующей конструкцией. Начальный фронт поднимается в интегральное многообразие пространства контактных элементов пространства-времени, лежащее в гиперповерхности медлительностей. Затем рассматриваются характеристики этой гиперповерхности, проходящие через точки построенного интегрального многообразия. Они образуют лежандрово многообразие. Его проекция в пространство-время — это большой фронт. Сечения большого фронта изохронами* $t = \mathrm{const}$ *— это мгновенные фронты.*

В этом состоит описание распространения возмущений при помощи волн (фронтов) и лучей (характеристик).

Поскольку характеристики определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями, каждая их них определяется одной своей точкой. При совершенно разных начальных условиях, для которых совпадают лишь касательные гиперплоскости начальных фронтов в одной точке в начальный момент времени, характеристики будут одинаковыми. Физически это означает, что бесконечно малые кусочки волнового фронта распространяются (вдоль характеристик) независимо друг от друга. Это и позволяет привлечь для описания распространения фронта (волн, определяемых уравнениями с частными производными) частицы (движение которых определяется обыкновенными дифференциальными уравнениями — уравнениями Гамильтона для характеристик гиперповерхности медлительностей).

В частности, в качестве начального условия можно даже взять точечный фронт (соответствующий лежандрову многообразию, составляющему слой расслоения контактных элементов). Теорема применима и в этом случае (хотя он и кажется вырожденным с точки зрения приведенного выше следствия).

Точечному начальному фронту соответствует «сферическая» волна. Сопоставляя распространение возмущений от произвольного начального фронта с распространением возмущений от одного из составляющих его точечных источников, мы видим, что соответствующие им лежандровы многообразия содержат общую характеристику. Из этого следует, что мгновенный фронт в последующие моменты времени касается сферического фронта исходного точечного источника в точке на луче, выходящем из источника по направлению, определяемому направлением начального фронта.

Отсюда следует, что мгновенный фронт в момент t является огибающей семейства сферических фронтов точечных источников, принадлежащих исходному фронту. Это — первоначальная формулировка принципа Гюйгенса (известного в разных отделах математики под разными именами: принцип Понтрягина, канонические уравнения Гамильтона и т. д.).

Между прочим, уравнения характеристик — не что иное, как инфинитезимальный вариант утверждения Гюйгенса об огибающей, соответствующий бесконечно малым значениям t и, следовательно, бесконечно малым сферическим фронтам.

Разумеется, в описанной выше геометрической теории предполагалось, что нужные определители отличны от нуля, так что теорема о неявной функции применима. Например, поле лоренцевых конусов в пространстве-времени нигде не должно касаться изохрон $t = \mathrm{const}$ и т. д. Нетрудно проверить, что в таких примерах, как задачи римановой геометрии, даже с зависящей от времени метрикой, эти условия выполнены автоматически. В других задачах, например, в теории оптимального управления, ситуация часто оказывается более сложной, и необходимость исследовать особенности, возникающие при обращении определителей в нуль, составляет основную трудность.

Тот факт, что характеристики, проведенные через точки начального интегрального многообразия, образуют лежандрово многообразие, нуждается в доказательстве. Мы на нем не останавливаемся, потому что оно совершенно такое же, как уже проведенное выше доказательство теоремы 3 лекции 2.