Лекция 4.

Струна (метод Даламбера)

Рассмотрим струну (можно представлять себе реальную струну музыкального инструмента, прикрепленную к деке, рис. 4.1).

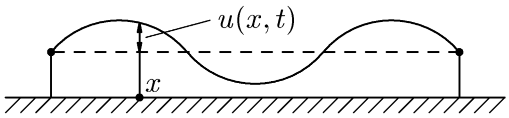


Рис. 4.1. Струна

Пусть $u(x,t)$ — смещение струны в точке x в момент t от равновесного состояния в ортогональном направлении. Известно, что если струна однородна, а смещения невелики по сравнению с размерами струны, то функция $u(x,t)$ удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{4.1}$$

Выводом этого уравнения мы в данной лекции заниматься не будем. Здесь a — константа, имеющая физический смысл скорости, как будет показано ниже.

1. Общее решение

Задача 1. Покажите, что уравнение (4.1) заменой переменных

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

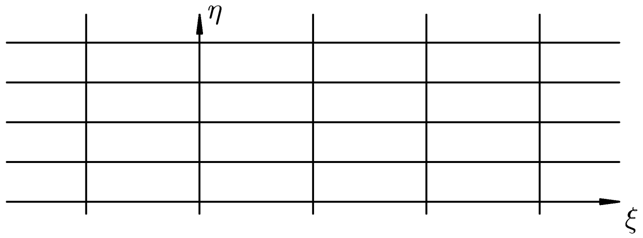


Рис. 4.2. Характеристики уравнения струны

приводится к виду

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{4.2}$$

(При $a = 1$ эта замена представляет собой композицию поворота и растяжения в плоскости независимых переменных.)

Уравнение (4.2) легко решается: запишем его в виде $(u_\xi)_\eta = 0$, что означает, что функция u_ξ не зависит от η, т. е. постоянна вдоль вертикальных прямых на плоскости (ξ, η), рис. 4.2.

Итак, $u_\xi = f(\xi)$, т. е. дифференциальное уравнение свелось к простейшему уравнению вида $F' = f$, значит, $u = \int f(\xi)\,d\xi = F(\xi) + G(\eta)$; заметим, что константа интегрирования, вообще говоря, зависит от прямой, вдоль которой интегрирование происходит, т. е. от η.

Если мы ищем решение в классе таких функций, чтобы все они, в том числе в промежуточных выкладках, были непрерывными, то получим общее решение вида $f(\xi) + g(\eta)$, где функция f гладкая, а g непрерывная. Мы пришли к «решению», которое может вообще не иметь производных! Кроме того, решая в другом порядке, получим асимметрию в смысле гладкости. Симметричность же смешанных частных производных имеет место только в достаточно гладком случае. Это наблюдение служит стимулом к введению обобщенных функций, в классе которых можно рассматривать решение вида $f(\xi) + g(\eta)$ с негладкими f, g.

Мы в данной лекции считаем, что решение ищется в классе достаточно гладких функций, так что f и g достаточно гладкие.

Итак, $u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$ — общее решение уравнения (4.2).

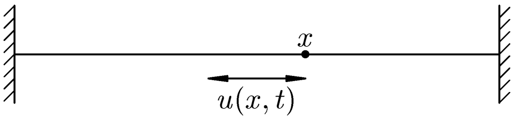


Рис. 4.3. Стержень

2. Краевые задачи и задача Коши

Задача Коши выявляет сходство и различие теорий ОДУ и УРЧП. В теории ОДУ фазовое пространство конечномерно, а мы будем иметь дело с бесконечномерным фазовым пространством.

Задача Коши для струны представляет собой уравнение (4.1) с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{4.3}$$

Значение второй производной в начальный момент не надо задавать, поскольку ее можно определить из уравнения.

Мы считаем, что $x \in \mathbb{R}$, т. е. струна бесконечна. Эта модель дает хорошее приближение к физической реальности, если мы рассматриваем малые по сравнению с размером струны отклонения на малых промежутках времени.

Первая краевая задача включает уравнение (4.1) при $x \in (0, l)$, начальные условия (4.3) и граничные условия

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \tag{4.4}$$

выражающие тот факт, что конечная струна закреплена на концах.

Эта задача описывает также продольные колебания закрепленного на концах стержня, здесь $u(x, t)$ — смещение точки x стержня от положения равновесия в момент t, рис. 4.3.

Можно рассмотреть колебания стержня с одним или обоими свободными концами, что выражается условием

$$u_x|_{x=0} = 0 \qquad \text{и/или} \qquad u_x|_{x=l} = 0. \tag{4.5}$$

Комбинацией этих условий получаются вторая и третья краевые задачи.

Четвертая краевая задача: рассматриваются периодические граничные условия

$$u(x,t) = u(x+l,t), \tag{4.6}$$

тем самым функция u задана на окружности.

Мы собираемся получить полные решения всех указанных задач (частью — на упражнениях).

3. Задача Коши для неограниченной струны. Формула Даламбера

Итак, рассмотрим задачу Коши $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$.

Теорема (формула Даламбера). *Решение задачи Коши дается формулой*

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\, dy. \tag{4.7}$$

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Мы знаем, что общее решение уравнения имеет вид $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$. Рассмотрим слагаемое $f(x-at)$. График функции $f(x-at)$ в фиксированный момент t представляет собой график функции $f(x)$, сдвинутый при $t > 0$ вправо на at. Это слагаемое называется *прямой волной*. Аналогично слагаемое $g(x+at)$ называется *обратной волной*. Подставим $t = 0$ сначала в формулу общего решения, а затем в эту же формулу, продифференцированную по t, получим систему:

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) = f(x) + g(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) = -af'(x) + ag'(x). \end{cases} \tag{4.8}$$

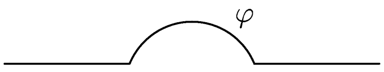
Решив ее, найдем f, g, подставим в формулу общего решения и получим (4.7).

Задача 2. Восстановите подробности доказательства.

Задачи о «мультфильмах»

Пользуясь формулой Даламбера, можно рисовать последовательные «кадры мультфильма о колебании струны», зная графики условий Коши.

Пример. Пусть $\psi \equiv 0$, а график φ имеет вид, как на рис. 4.4, где $\varphi \neq 0$ на интервале длины 1.



, $\psi \equiv 0$

Рис. 4.4. Начальные условия

Тогда по формуле Даламбера, которая в данном случае имеет вид $u(x,t) = (\varphi(x-at) + \varphi(x+at))/2$, получим форму струны в последовательные моменты времени, рис. 4.5.

Задача 3. Нарисуйте мультфильм для начальных условий $\varphi \equiv 0$, ψ — функция вида .

4. Полуограниченная струна

Задача включает в себя уравнение (4.1), начальные условия (4.3) и граничные условия $u|_{x=0} \equiv 0$ (закрепленный конец) или $u_x|_{x=0} \equiv 0$ (свободный конец).

Комбинируем граничные условия и вид начальных данных, получаем таблицу задач:

Задачи 4–7. Нарисуйте мультфильмы движения струны для указанных в таблице условий.

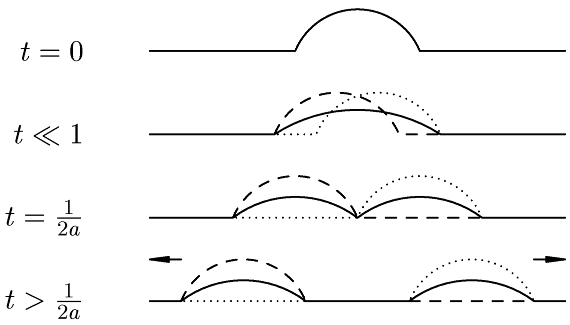


Рис. 4.5. Форма струны в последовательные моменты

граничные условия \ начальные условия	φ: $\psi \equiv 0$	$\varphi \equiv 0$ ψ:
свободный конец при $x = 0$	4	5
закрепленный конец при $x = 0$	6	7

У к а з а н и е. Полуограниченную задачу можно свести к неограниченной так, чтобы решение неограниченной задачи, суженное на полупрямую, давало решение полуограниченной задачи. Для этого необходимо так продолжить начальные условия на всю прямую, чтобы решение в точке $x = 0$ удовлетворяло граничным условиям.

Здесь помогают соображения четности. Продолжить начальное условие на всю прямую четным образом можно, если в начальный момент $u_x|_{x=0} = 0$. Но будет ли решение в любой момент четным по x? Во-первых это можно вывести из формулы Даламбера, во-вторых можно воспользоваться следующей замечательной идеей.

При выводе формулы Даламбера доказана единственность решения задачи Коши. Уравнение инвариантно относительно преобразования $x \mapsto -x$. Если начальное условие четно, т. е. тоже инвариантно относительно этого преобразования, то имеем два решения: $u(x,t)$ и $u(-x,t)$. Но поскольку решение единственно, то они совпадают: $u(x,t) = u(-x,t)$, т. е. решение четно.

Это общая идея: если задача выдерживает некоторую симметрию, а решение единственно, то оно тоже выдерживает эту симметрию.

Аналогично можно использовать нечетное продолжение для условия $u|_{x=0} = 0$.

5. Ограниченная струна (резонанс)

Метод Даламбера не очень удобен для решения краевых задач в случае ограниченной струны, впоследствии мы разовьем другой очень мощный метод. Сейчас проиллюстрируем применение метода Даламбера на задаче о вынужденных колебаниях ограниченной струны. Эта задача включает в себя уравнение (4.1), начальные условия (4.3) и следующие краевые условия: $u|_{x=0} = f(t)$, $u|_{x=l} = 0$.

Задача 8. Найдите общее решение.

У к а з а н и е. Вклад в решение в точке (x,t) дают значения, принесенные с краев и с начального отрезка $t = 0$ вдоль характеристик $x - at = \mathrm{const}$, $x + at = \mathrm{const}$. Характеристики претерпевают излом, отражаясь от краев. В итоге значение решения представляет собой альтернированную сумму значений в узлах полученных ломаных, рис. 4.6.

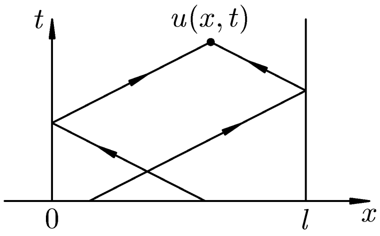


Рис. 4.6. Как получается значение решения в данной точке

Начальные условия могут быть произвольными, для простоты можете сначала рассмотреть нулевые.

Задача 9. Пусть функция $f(t)$ периодическая с периодом T. Будет ли существовать периодическое решение с такими граничными условиями? Если будет, то будут ли периодическими остальные решения?

О т в е т. Периодического решения не существует, например, в случаях резонанса (когда период внешней силы T соизмерим с «периодом собственных колебаний» $2l/a$). При почти всех (в смысле меры Лебега) значениях T периодическое решение существует (по крайней мере, если функция гладкая). Это вытекает из теоретико-числовых соображений (метрической теории диофантовых приближений).

В заключение отметим, что все рассмотренные результаты требовали лишь элементарного математического анализа, не выходящего за рамки теории дифференцирования и интегрирования. Следующие разделы потребуют более мощных средств анализа.

6. Метод Фурье

Вернемся к уравнению (4.1): $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. На его правую часть мы можем смотреть как на дифференциальный оператор, отображающий одно функциональное пространство в другое (или в себя, если рассматривать пространство бесконечно гладких или аналитических функций).

Запишем уравнение (а вместе с ним и любую рассмотренную задачу) более абстрактно, например:

$$u_{tt} = Au,$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \quad \text{или} \quad u(x+2\pi, t) = u(x,t).$$

Начальные условия не фиксируем, поскольку хотим научиться решать задачу для произвольных начальных условий.

Итак, A — линейный оператор, точкой фазового пространства является функция u, удовлетворяющая нашим граничным условиям.

Оператор A имеет некоторые дополнительные свойства, кроме линейности. Посмотрим, что могут дать эти свойства, для простоты, сначала на конечномерных моделях.

Модель 1. Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение $u_t = Au$, u — вектор в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, A — самосопряженный оператор: $(Ax, y) = (x, Ay)$, где скобки обозначают скалярное произведение. Тогда оператор A имеет ортогональный базис из собственных векторов X_k, причем соответствующие собственные значения λ_k вещественны. Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{\lambda_k t} X_k$. Общее решение имеет вид $u(t) = \sum c_k e^{\lambda_k t} X_k$. Легко найти решение с заданным начальным условием $u(0) = \varphi$ (в данном случае это конечномерные векторы). Подставим $t = 0$: $\varphi = \sum c_k X_k$, нам надо найти c_k. Домножим скалярно на X_j, воспользуемся ортогональностью базиса и получим: $c_j = (\varphi, X_j)/(X_j, X_j)$.

Сходство с волновым уравнением здесь в том, что наш дифференциальный оператор второго порядка d^2/dx^2 — самосопряженный в подходящем пространстве.

Дифференциальные операторы в пространстве тригонометрических многочленов

Одна из самых замечательных идей Гильберта заключается в том, чтобы рассматривать пространства функций как евклидовы. Эта идея лежит в основе функционального анализа.

Но сейчас мы ограничимся конечномерными пространствами тригонометрических многочленов. При любом натуральном N рассмотрим пространство

$$E_N = \{u(x) = \sum_{k=-N}^{k=N} c_k e^{ikx}, \quad x \in S^1,\ c_k \in \mathbb{C}\}.$$

Если суммирование распространяется от $-N$ до N, то мы остаемся в пределах линейной алгебры, если от $-\infty$ до $+\infty$ — то попадаем в область рядов Фурье, это уже раздел функционального анализа.

На пространстве E_N введем эрмитову структуру:

$$(f, g) := \int_0^{2\pi} f\bar{g}\, dx.$$

Задача 10. Проверьте, что выполнены все аксиомы эрмитова пространства.

Норма многочлена определяется формулой $\|f\|^2 = (f, f)$.

Задача 11. Докажите, что многочлены $e_k = e^{ikx},\ k \in \{-N, \ldots, N\}$ образуют ортогональный базис.

Р е ш е н и е: $\int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx}\, dx = 2\pi$, если $k = l$; если же $k - l = m \neq 0$, то интеграл равен $\int_0^{2\pi} e^{imx}\, dx = \frac{1}{im} e^{imx}|_0^{2\pi} = 0$.

Модель 2. Рассмотрим периодическую краевую задачу для волнового уравнения с начальными условиями из пространства E_N:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(x + 2\pi, t) = u(x, t),$$
$$u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi, \quad \varphi, \psi \in E_N.$$

В следующей лекции мы сведем ее к системе ОДУ вида $u_{tt} = Au$, т. е. аналогичной системе модели 1.