Лекция 5.

Метод Фурье (для струны)

Рассмотрим периодическую краевую задачу для струны:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \tag{5.1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{5.2}$$

Эту задачу можно рассматривать как задачу Коши на окружности S^1. На связном компактном многообразии с краем (например, на отрезке) пришлось бы задавать те или иные краевые условия.

1. Решение задачи в пространстве тригонометрических многочленов

Рассмотрим пространство комплексных тригонометрических многочленов

$$E_N = \left\{ \sum_{-N}^{N} a_k e^{ikx},\ a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(Можно рассматривать и вещественнозначные многочлены; необходимое и достаточное условие вещественности $a_k = \overline{a_{-k}}$.)

Пусть начальные данные $\varphi, \psi \in E_N$. Тогда и решение $u(\cdot, t) \in E_N$. В E_N имеется эрмитова структура:

$$(f, g) = \int\limits_{S^1} f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad \|f\|^2 = (f, f).$$

Легко проверяются следующие свойства:

1) Многочлены $\{e^{ikx}\}$ образуют ортогональный базис. Этот базис не нормированный: $\|e^{ikx}\| = \sqrt{2\pi}$. Обозначим $X_k = e^{ikx}$.

2) Оператор $L = a^2 \dfrac{d^2}{dx^2} \colon E_N \to E_N$ самосопряженный, причем X_k — его собственные векторы:

$$LX_k = -a^2 k^2 X_k.$$

2. Отступление

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и в нем самосопряженный невырожденный оператор $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, пусть $\{X_k\}$ — ортогональный собственный базис, $\lambda_k = -\omega_k^2$ — собственные значения.

Рассмотрим задачу: $\ddot{x} = Lx,\ \ x(0) = \varphi,\ \ \dot{x}(0) = \psi$.

Вектор-функции $\sin(\omega_k t)X_k,\ \ \cos(\omega_k t)X_k$ образуют фундаментальную систему решений этой задачи. Действительно, размерность пространства решений задачи равна $2n$ (это доказывается сведением к системе первого порядка: $\dot{x} = p,\ \ \dot{p} = Lx$), указанные $2n$ функций являются решениями, и, кроме того, они линейно независимы (проверьте!).

Значит, общее решение имеет вид

$$x(t) = \sum (a_k \cos \omega_k t\, X_k + b_k \sin \omega_k t\, X_k).$$

Легко также найти решение с заданными начальными условиями:

$$x(0) = \sum a_k X_k \Rightarrow a_k = \frac{(\varphi, X_k)}{(X_k, X_k)},$$
$$\dot{x}(0) = \sum b_k \omega_k\, X_k \Rightarrow b_k = \frac{(\psi, X_k)}{\omega_k (X_k, X_k)}.$$

3. Формулы для решения задачи пункта 1

В этом случае вместо x пишем u, вместо $\mathbb{R}^n$ имеем E_N, $L = a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, для простоты считаем, что $a = 1$. Имеем: $X_k = e^{ikx},\ \ \omega_k = k$.

Тогда общее решение задачи Коши имеет вид:

$$u(x,t) = \sum (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) e^{ikx}, \tag{5.3}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi}(\varphi, e^{ikx}), \tag{5.4}$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi k}(\psi, e^{ikx}),\ k \neq 0. \tag{5.5}$$

Суммирование в этих формулах ведется в пределах от $-N$ до N.

Итак, процесс решения задачи Коши в классе E_N не выходит за рамки линейной алгебры. Но замечательно, что и в общем случае ответ дается формулами (5.3)–(5.5) (с суммированием от $-\infty$ до $+\infty$).

4. Общий случай

Пусть $\varphi, \psi \in C^\infty(S^1)$ (можно также рассмотреть класс аналитических начальных данных или, наоборот, конечной гладкости).

Теорема. *Решение задачи Коши* (5.1), (5.2) *дается формулами* (5.3)–(5.5) *с суммированием от* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Для доказательства надо проверить сходимость ряда, возможность почленного дифференцирования и удовлетворение начальных условий.

5. Ряды Фурье

Нам надо доказать сходимость ряда (5.3) вместе с частными производными до второго порядка включительно.

Рассмотрим пространство $C^\infty(S^1)$ с эрмитовой структурой

$$(f,g) = \int\limits_{S^1} f\bar{g}\,dx, \quad \|f\|^2 = (f,f).$$

Это пространство не полно в этой норме, поэтому называется предгильбертовым (полное называется гильбертовым). В этом пространстве система функций $\{X_k\} = \{e^{ikx}\}$ образует в некотором смысле «базис».

Заметим, что ряд (5.3) можно переписать в виде ряда по экспонентам, воспользовавшись формулами Эйлера. Появятся члены вида $e^{ik(t+x)}, e^{ik(t-x)}$. Такой ряд легко будет дифференцировать.

Для доказательства сходимости ряда (5.3) вместе со всеми рядами, полученными почленным дифференцированием, достаточно доказать, что коэффициенты a_k, b_k стремятся к 0 быстрее, чем любая степень k.

Чтобы доказать выполнение начальных условий, надо доказать, что ряд Фурье функции сходится к ней самой. В этом смысле система функций $\{X_k\}$ и является базисом:

$$\varphi \sim \sum a_k X_k, a_k = (\varphi, X_k)/(X_k, X_k), \text{ тогда } \sum a_k X_k \to \varphi.$$

Заметим, что та часть доказательства, где доказывается просто сходимость ряда Фурье начального условия (безотносительно к предельной функции) не будет отличаться от доказательства сходимости ряда (5.3). Для этого, как уже отмечено, достаточно установить быстрое убывание $|a_k|$.

6. Сходимость рядов Фурье

Лемма 1. *Коэффициенты Фурье функции из класса $C^\infty(S^1)$ убывают быстрее любой степени своего номера.*

Доказательство. Очевидна следующая оценка:

$$|a_k| \leqslant (\max_{S^1} |\varphi|) \cdot 2\pi,$$

т. е. коэффициенты по меньшей мере ограничены. Выполним интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi} \int \varphi(x) e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{1}{-2\pi i k} \int \varphi(x)\, d(e^{-ikx}) = \\ &= \frac{1}{-2\pi i k} \Big(\varphi(x) e^{-ikx}|_0^{2\pi} - \int \varphi'(x) e^{-ikx} dx \Big) = \\ &= \frac{1}{2\pi i k} \int \varphi'(x) e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

По той же самой причине, что в начале, последний интеграл ограничен равномерно по k. Далее, можно снова выполнять интегрирование по частям, причем столько раз, сколько нам нужно.

В итоге получим, что $\forall m\, \exists C_{m,\varphi}\colon |(\varphi, e^{ikx})| < C_{m,\varphi} |k|^{-m}$. Лемма доказана.

Замечание. Для функции класса C^m получим убывание коэффициентов Фурье, как $1/|k|^m$.

Задача. Пусть функция φ принадлежит классу $C^\omega(S^1)$, т.е. φ голоморфна в полосе $|\mathrm{Im}\, z| \leqslant \beta$ и периодична: $\varphi(z+2\pi) \equiv \varphi(z)$. Докажите, что тогда коэффициенты Фурье убывают экспоненциально:

$$|a_k| < C\, e^{-\beta|k|}.$$

Указание. Сдвиньте путь интегрирования в интеграле, определяющем коэффициенты Фурье, на $\pm i\beta$ (в зависимости от знака k).

Верно ли обратное утверждение: если для коэффициентов Фурье верна последняя оценка, то функция допускает голоморфное периодическое продолжение в указанную полосу?

Ответ. Сумма ряда голоморфна внутри указанной полосы.

Замечание. Если функция непрерывна, то ряд Фурье сходится к ней в метрике L^2. Как показал современный шведский математик Карлесон, на множестве полной меры имеет место поточечная сходимость.

Лемма 2. *Ряд Фурье функции класса C^2 сходится к ней самой.*

Доказательство. Ряд Фурье, построенный по функции φ класса C^2, равномерно сходится к некоторой функции $\psi \in C^0$ (по замечанию после леммы 1). Надо доказать, что $\varphi \equiv \psi$. Допустим противное: $\delta(x) := \varphi(x) - \psi(x) \not\equiv 0$. Тем не менее δ имеет нулевой ряд Фурье: $\forall k\ (\delta, X_k) = 0$.

Попробуем приблизить δ тригонометрическим полиномом:

$$\Big\|\delta - \sum c_k X_k\Big\|^2 = \|\delta\|^2 + \Big\|\sum c_k X_k\Big\|^2 \geqslant \|\delta\|^2 > 0. \qquad (*)$$

Мы видим, что как угодно точное приближение невозможно. Однако по теореме Вейерштрасса можно приблизить непрерывную функцию δ с любой точностью тригонометрическими полиномами равномерно. Это противоречит $(*)$. Лемма доказана.

Замечание. Можно рассмотреть метод Фурье для задачи на отрезке с теми или иными граничными условиями. Но фактически разработан метод решения совершенно общей задачи $u_{tt} = Au$, где u —

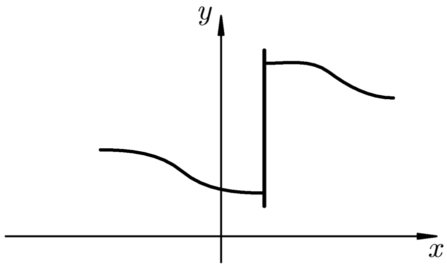

Рис. 5.1. Явление Гиббса

функция на произвольном многообразии. Надо для оператора A на многообразии найти собственные функции и собственные значения, ортогональный базис из собственных функций, а затем осуществить всю вышеуказанную схему.

Уже для оператора Лапласа $A = \Delta$ получается богатая теория, например, на многообразиях с римановой метрикой. Она составляет часть спектральной теории дифференциальных операторов.

7. Явление Гиббса

Ряд Фурье разрывной периодической функции не может сходиться к ней равномерно, но может сходиться поточечно (например, это так для разрывных кусочно-гладких функций: сумма такого ряда совпадает с самой функцией на интервалах гладкости). Последовательность *графиков* частичных сумм ряда Фурье кусочно-гладкой функции сходится (равномерно!), но сходится не к графику исходной функции, а к другой кривой. Эта кривая получается из графика данной разрывной функции добавлением вертикальных отрезков над точками разрыва. Интересно, что *эти отрезки длиннее, чем отрезки, соединяющие части графика слева и справа от точки разрыва.* При этом длины дополнительных вертикальных хвостиков, выступающих вверх и вниз за график исходной функции, составляют всегда одинаковую долю (примерно 9% каждый) от величины разрыва (рис. 5.1).

Для доказательства этого удивительного факта (называемого *явлением Гиббса*) достаточно явно провести вычисления максимума и минимума частичной суммы ряда Фурье простейшей 2π-периодической разрывной функции (скажем, равной x при $|x| < \pi$). Общий случай можно свести к этому, уничтожая разрывы вычитанием подходящей линейной комбинации сдвигов этой простейшей разрывной функции.

Явление Гиббса приводит к интересным артефактам в томографии (где функция двух переменных, например, рентгеновская оптическая плотность плоского сечения человеческого тела, восстанавливаемая компьютером при помощи суммирования (двойного) ряда Фурье)[1].

Поскольку плотность — разрывная функция (например, из-за существования костей), возникает явление Гиббса. Оно проявляется здесь в виде дополнительных к линиями разрыва прямых: двойных касательных и касательных перегиба реальных границ тканей различной плотности (подумайте, почему).

[1] Коэффициенты этого ряда являются коэффициентами Фурье так называемого преобразования Радона исходной плотности; преобразование Радона — это интеграл исходной плотности вдоль прямой, рассматриваемый как функция прямой; здесь оно рассматривается как функция одной переменной, а именно, расстояния прямой данного параллельного пучка прямых от одной из этих прямых.