Лекция 6.

Теория колебаний. Вариационный принцип

Физикам известен экспериментальный факт: законы природы описываются вариационными принципами. Он не имеет рационального обоснования, что рождает попытки богословского, философского и пр. истолкований, см., например, сочинения Вольтера, Мопертюи и др. в сборнике «Вариационные принципы механики».

Принцип гласит, что «природа совершает свои действия кратчайшим путем». Например, согласно принципу Ферма, лучи света распространяются кратчайшим путем. В математической формулировке, близкой к современной, принцип наименьшего действия сформулирован Гамильтоном. Он имеет вид:

$$\delta \int L\,dt = 0.$$

Входящий в эту формулу интеграл называется действием. Принцип описывает движение некоторой механической системы. Лагранжиан $L(q, \dot{q}, t)$ — функция от состояния и скорости движения в соответствующем конфигурационном пространстве. В этой формулировке принцип читается так: «Движение механической системы $q = q(t)$ возможно тогда и только тогда, когда вариация интеграла действия вдоль кривой $q = q(t)$ равна нулю».

Другими словами, истинное движение является критической точкой функции действия, заданной на бесконечномерном пространстве гладких отображений отрезка в конфигурационное пространство,

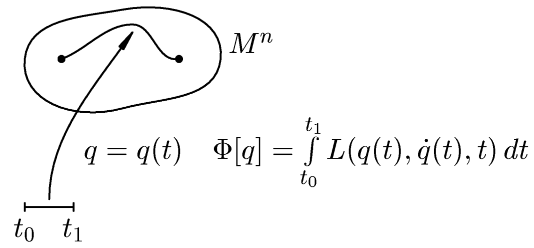

Рис. 6.1. Истинные движения — критические точки функции действия

рис. 6.1. Функции на бесконечномерных пространствах обычно называют функционалами. Какой вид имеет функция действия для типичной механической системы?

Рассмотрим движение точки q по риманову многообразию M^n. Траектория задана отображением $q = q(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Будем считать, что концы $q(t_0), q(t_1)$ фиксированы. Касательный вектор $\dot q(t)$ имеет риманов квадрат длины. Величина $T = (1/2)\dot q^2$ называется *кинетической энергией*. Рассмотрим также некоторую функцию $U\colon M^n \to \mathbb{R}$, называемую *потенциальной энергией*. Положим $L = T - U$, эта функция называется *функцией Лагранжа*, или *лагранжианом*.

(В 19-м веке шли споры по поводу обозначений для координат, импульсов, а также о выборе знака в лагранжиане; математикам «минус», разумеется, не нравился. По обыкновению, победили физики, и теперь общепринятые обозначения такие: q — координаты, p — импульсы, $L = T - U$ — лагранжиан, $F = \dfrac{\partial L}{\partial q}$ — сила. Во всяком случае, физический здравый смысл удовлетворен: при поднимании камня от поверхности Земли его энергия увеличивается. См. Клейн [2].)

Функционал действия имеет вид: $\Phi[q] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot q(t), t)\, dt$.

В координатах кинетическая энергия T представляет собой квадратичную форму: $T = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{ij} a_{ij}\dot q_i \dot q_j$.

Введем импульсы $p_i = \dfrac{\partial T}{\partial \dot q_i}$.

Геометрически импульс есть линейная форма от касательного вектора, т. е. кокасательный вектор.

Теорема 1. *Экстремали (критические точки) функционала дей-*

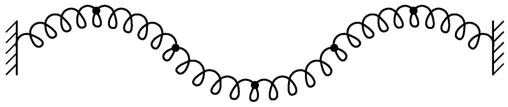

Рис. 6.2. Модель струны Лагранжа

ствия удовлетворяют системе уравнений Эйлера – Лагранжа

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(Это система n ОДУ второго порядка относительно n неизвестных функций $q_i(t)$.)

Теорему докажем позже, а сейчас выявим связь с уравнением колебаний струны и рассмотрим некоторые примеры.

Лагранж рассмотрел «дискретную струну», состоящую из шариков, скрепленных между собой пружинками, рис. 6.2.

Для такой системы нетрудно найти лагранжиан и вывести уравнения движения, затем предельным переходом можно получить уравнение струны и понять его вариационную основу, найти лагранжиан. Сначала рассмотрим простые примеры.

Пример 1. Пусть частица свободно движется в евклидовом пространстве, например, для простоты, на плоскости. Тогда потенциальная энергия U равна 0, лагранжиан $L = T = (1/2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$. Легко проверить, что экстремали действия — прямые. Действительно, по теореме 1 экстремали удовлетворяют уравнениям Эйлера – Лагранжа, которые в данном случае имеют вид: $\dot{p}_1 = 0$, $\dot{p}_2 = 0$. Но $p_1 = \dot{q}_1$, $p_2 = \dot{q}_2$, т. е. обобщенные импульсы совпадают со скоростями. Тогда $\ddot{q}_1 = 0$, $\ddot{q}_2 = 0$, решения этих уравнений — прямые, рис. 6.3.

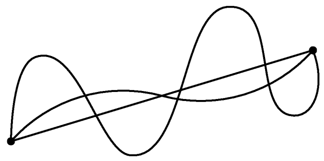

Рис. 6.3. Прямые — экстремали действия для свободной частицы

Пример 2. Теперь введем потенциальную энергию $U = U(q)$, т. е. пусть частица движется в силовом поле. Имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial U}{\partial q_1}, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial U}{\partial q_2}, \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -\frac{\partial U}{\partial q_1}, \\ \ddot{q}_2 &= -\frac{\partial U}{\partial q_2}. \end{aligned}$$

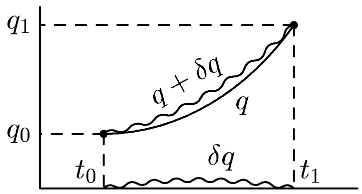

Рис. 6.4. Вариация движения

Рассмотрим случай, когда U — квадратичная форма. Например, при $n = 1$ имеем $U = aq^2$, уравнение $\ddot{q} = -aq$ есть уравнение маятника.

В общем случае квадратичного потенциала U приведем квадратичную форму к главным осям ортогональным преобразованием (в смысле метрики, определенной кинетической энергией). Получим систему независимых осцилляторов. Возвращаясь к струне, можно сказать, что она представляет собой бесконечную систему независимых маятников.

Доказательство теоремы 1. Для простоты, чтобы не писать индексов, будем считать, что $q \in \mathbb{R}$. Имеем лагранжиан $L(q, \dot{q}, t)$. Рассмотрим вариацию движения $\delta q(t)$, $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$, рис. 6.4.

Вычислим приращение лагранжиана:

$$L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\delta\dot{q}) + o(\delta).$$

Теперь найдем главную линейную часть приращения действия:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\delta\dot{q})\right) dt \stackrel{(*)}{=}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta q \left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q}\right) dt.$$

Переход $(*)$ — интегрирование по частям, причем учтено, что подстановка равна 0, т. к. на концах отрезка вариация траектории равна 0.

Если траектория критическая, то последнее выражение тождественно равно 0. Тогда

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q} \equiv 0,$$

иначе можно было бы так подобрать вариацию δq, что интеграл не будет равен 0 (это упражнение). Теорема доказана.

В случае свободного движения частиц лагранжиан имеет вид $L = T$. Из уравнений Эйлера – Лагранжа сразу получается, что критические траектории — прямые. На них достигается минимум интеграла. Для задачи о кратчайшем пути $L = \sqrt{2T}$ экстремали опять прямые и на них достигается минимум.

Важное замечание. Эта теория не зависит от системы координат. Поэтому если некоторое уравнение есть уравнение Эйлера – Лагранжа, то оно имеет вид Эйлера – Лагранжа в любой другой системе координат. Поэтому достаточно делать замену координат только в лагранжиане.

Упражнение. Рассмотрим равномерное движение $q(t)$ частиц по прямым, тогда $q(t)$ — решение уравнения $\ddot{q} = 0$. Запишите соответствующее уравнение в полярных координатах.

Подробнее о методах вариационного исчисления см. [1, гл. 3], там же имеются дальнейшие ссылки.

Из нашей теории получается мощный метод исследования системы в окрестности критической точки по отношению к отклонению от положения равновесия потенциальной энергии, например, минимума. Заменим потенциал его квадратичной частью, ошибка в правой части уравнения (т. е. в силе) будет второго порядка малости по сравнению с отклонением от положения равновесия; линейная же часть при этом не изменится, так что описанная замена есть просто линеаризация. Квадратичную форму кинетической энергии, зависящую как от параметра от положения q, заменим постоянной формой, взятой в точке минимума. В конечномерном случае кинетическая и потенциальная энергия будут иметь вид:

$$T = \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}), \quad U = \frac{1}{2}(Bq, q).$$

Первая форма положительно определена, а вторая — не обязательно, если исходная критическая точка потенциальной энергии не минимум.

Известно, что две такие формы можно одновременно привести к главным осям. Это — приведение второй формы к главным осям ортогональным преобразованием, где первая форма задает евклидову структуру пространства. Практически для этого надо решить характеристическое уравнение $\det(B - \lambda A) = 0$. Исторически это уравнение возникло у Лагранжа при изучении вековых колебаний орбит планет около кеплеровских орбит, поэтому характеристическое уравнение называлось секулярным (вековым).

Итак, в теории малых колебаний, по определению, кинетическая энергия T задает евклидову структуру в конфигурационном пространстве, потенциальная энергия U — квадратичная форма в этом пространстве. В декартовых координатах уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид $\ddot{q} = -\nabla U = -Bq$.

Существует простой геометрический способ отыскания главных осей. Рассмотрим эллипсоид уровня квадратичной формы (Bq, q). Самая далекая в смысле заданной евклидовой структуры точка от начала координат определит нам первый собственный вектор (первую главную ось). Остальные главные оси лежат в ортогональном дополнении к первой, соответствующая гиперплоскость пересекает эллипсоид по эллипсоиду меньшей размерности; к нему снова надо применить указанную процедуру и т. д., рис. 6.5. Замечательно, что этот метод работает и в бесконечномерном пространстве.

В главных осях система распадается на одномерные уравнения, которые явно решаются (выпишем решения в случае положительно определенной формы B):

$$\ddot{q}_k = -\lambda_k q_k,$$

$$q_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t, \quad \text{где } \omega_k = \sqrt{\lambda_k}.$$

Эти формулы описывают независимые гармонические собственные колебания по ортогональным направлениям. Если частоты несоизмеримы, то движение в целом непериодическое.

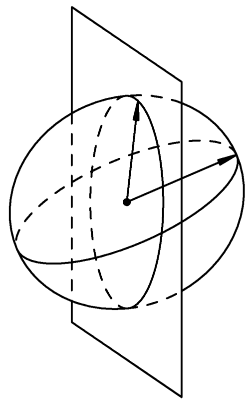

Рис. 6.5. Отыскание главных осей

Удобно записывать соответствующее собственным колебаниям решение в комплексной форме: $q(t) = \mathrm{Re}(A_k e^{i\omega_k t} \xi_k)$, здесь A_k — комплексная амплитуда, ξ_k — собственный вектор. Все решения получаются сложением этих: всякое колебание представляет собой суперпозицию собственных колебаний. Исходная система оказывается, таким образом, системой из n невзаимодействующих осцилляторов.

При увеличении потенциальной энергии U все собственные частоты растут (доказательство см. в [1]). Отсюда получаются следующие простые, но замечательные факты об эллипсоидах:

если один эллипсоид находится внутри другого, то каждая ось меньшего меньше соответствующей оси большего;

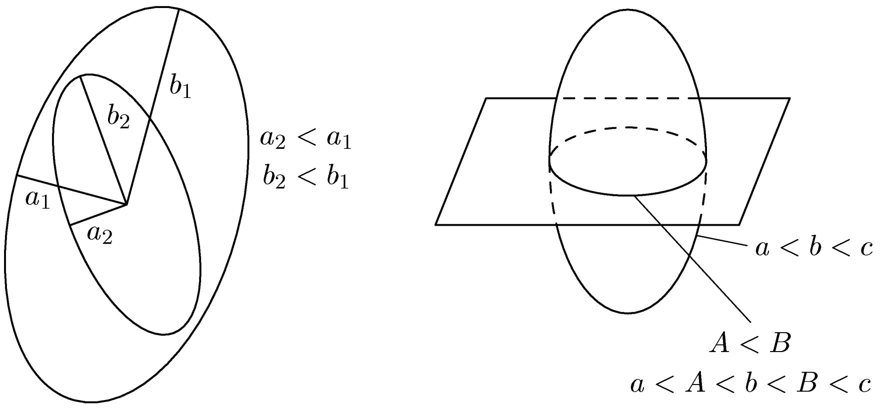

Рис. 6.6. Соотношения между осями эллипсоидов

рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью, проходящей через его центр, тогда оси сечения имеют промежуточные значения между осями исходного эллипсоида, рис. 6.6.

Практически эффект наблюдается, например, при заделывании трещины в колоколе: треснутый колокол звучит глухо, при заделывании трещины начинает звучать звонче.

Подробней о малых колебаниях см. [1, гл. 5], а также [3, §25, п. 6].

Чтобы обобщить нашу теорию на бесконечномерные системы, потребуется обоснование. Но сначала посмотрим, какие получатся результаты.

В случае одномерной закрепленной на концах струны конфигурационным пространством является пространство функций $u(x)\colon u(0) = u(l) = 0$. Предположим, что функции эти гладкие. Кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx.$$

Потенциальная энергия есть работа по приведению струны в заданную форму $u(x)$. Предположим, что эта форма мало отличается от стационарного положения $u \equiv 0$. При вычислении потенциальной энергии в приближении теории малых колебаний мы должны учитывать члены порядка u^2, но можем пренебрегать членами высшего порядка (u^3 и т. д.) Поскольку на изгибание струны работа не затрачивается, то вся работа идет на удлинение струны от исходной длины l до новой длины — длины графика $u(x)$.

Лемма. *Потенциальная энергия туго натянутой струны пропорциональна ее удлинению (в приближении малых колебаний), с коэффициентом, пропорциональным силе натяжения.*

Доказательство. По закону Гука сила натяжения пропорциональна удлинению. Удлинение — величина второго порядка малости по отношению к отклонению струны. Следовательно, величину силы натяжения деформируемой струны можно считать постоянной и не зависящей от формы струны (в рамках приближения малых колебаний, т. е. когда энергия вычисляется с учетом величин второго порядка малости по отношению к отклонению, но не третьего; в этом приближении силу достаточно вычислять, сохраняя члены первого порядка малости по отношению к отклонениям, пренебрегая величинами второго порядка малости).

Если сила натяжения при деформации постоянна, то энергия элемента струны вычисляется как работа этой постоянной силы на элементе пути и потому (в рассматриваемом приближении) пропорциональна удлинению этого элемента (и величине силы натяжения).

Суммируя потенциальные энергии всех элементов деформированной струны, мы получаем, что ее потенциальная энергия в рассматриваемом приближении равна произведению величины силы растяжения на удлинение всей струны.

Пренебрегая малыми выше второго порядка по отношению к u, мы получаем окончательно для потенциальной энергии выражение:

$$U = F\int_0^b \left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}-1\right)dx \approx \frac{F}{2}\int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Замечание. К тому же выражению можно было прийти, рассматривая модель с бусинками и пружинками, вычисляя силу, действующую на i-ю бусинку со стороны $(i-1)$-й и $(i+1)$-й (считая, что бусинка движется по нормали к невозмущенной струне). Нормальные невозмущенной струне проекции этих двух сил в первом приближении пропорциональны разностям отклонений соседних бусинок $q_i - q_{i-1}$ и $q_{i+1} - q_i$ соответственно (с разными знаками и с общим коэффициентом F, равным натяжению струны).

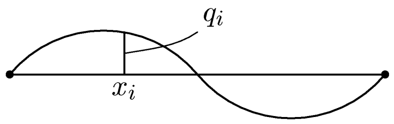

Рис. 6.7. Дискретная модель струны

Потенциальная энергия $U = \sum \frac{F}{2}(q_{i+1} - q_i)^2$ приводит именно к такой силе, действующей на i-ю бусинку:

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} = F\left[(q_{i+1} - q_i) - (q_i - q_{i-1})\right] = F(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}).$$

В пределе сумма превращается в полученный при доказательстве леммы интеграл.

Лагранжиан $L = T - U$.

Чтобы записать уравнение Эйлера – Лагранжа, найдем импульсы и силы.

Очевидно, $p(x) = \partial u/\partial t$ (если струна однородна и везде имеет плотность 1).

Потенциальная энергия в допредельном случае равна $\frac{F}{2}\sum(q_{i+1} - q_i)^2$, где $q_i = u(x_i)$, рис. 6.7.

Чтобы найти силу, возьмем производную по q_i, получим

$$-F(q_{i+1} - q_i) + F(q_i - q_{i-1}) = -F(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}).$$

В скобках стоит не что иное, как вторая разность (рис. 6.8), которая после предельного перехода превратится во вторую производную $\partial^2 u/\partial x^2$.

Итак, после предельного перехода уравнение Эйлера – Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

т. е. вид волнового уравнения. Коэффициент k прямо пропорционален ее натяжению и обратно пропорционален ее плотности. Метод решения у нас уже есть — будем искать собственные колебания. Надо найти главные оси квадратичной формы потенциальной энергии в метрике, заданной кинетической энергией. В конечномерном случае мы писали:

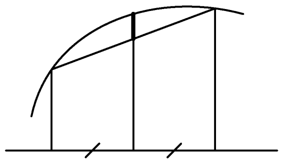

Рис. 6.8. Вторая разность

$$q(t) = Ae^{i\omega t}\xi.$$

Значит для струны надо искать решение в виде $u = e^{i\omega t}\xi(x)$.

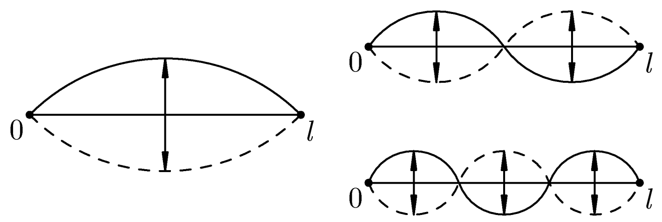

Рис. 6.9. Стоячие волны

Подставим в уравнение:

$$-\omega^2 e^{i\omega t}\xi(x) = ke^{i\omega t}\xi''(x).$$

Придем к задаче на собственные функции: $\xi''(x) = -\lambda\xi,\ \ \lambda = \dfrac{\omega^2}{k}$.

Это применение общей теории собственных колебаний называется *методом разделения переменных.* Решение:

$$\xi = a\cos\sqrt{\lambda}x + b\sin\sqrt{\lambda}x; \quad \xi(0) = 0 \Rightarrow a = 0;$$
$$\xi(l) = 0, \quad \sin\sqrt{\lambda}l = 0, \quad \sqrt{\lambda}l = n\pi; \quad \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}; \quad \omega \sim n.$$

Мы видим, что есть счетное количество главных осей, собственных функций; при увеличении номера n собственные частоты растут. При умножении собственной функции на вещественную часть комплексной экспоненты времени получим стоячую волну (рис. 6.9): форма волны не меняется, по t происходят гармонические колебания.

В конечномерном случае всякие колебания разлагались в суперпозицию собственных. В случае уравнения струны это тоже верно, но требует отдельного доказательства (доставляемого теорией рядов Фурье, для того и созданной. Поэтому теорию рядов Фурье и ее обобщения называют также *гармоническим анализом.*)

Обоснование возможности применения теории колебаний к системам с бесконечным числом степеней свободы (вроде струны) было получено математиками довольно поздно (в конце XIX — начале XX века) и привело к созданию функционального анализа, а затем — квантовой механики. Однако сама общая алгебраическая структура теории колебаний как с конечным, так и с бесконечным числом степеней свободы — теория гораздо более фундаментальная (и использовавшаяся физиками с полным успехом задолго до строгого математического обоснования).

Положение здесь сходно с обоснованием теории вещественных чисел (полученным, строго говоря, лишь в XIX веке). Древним грекам времен Пифагора пришлось засекретить теорему о несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, подрывавшую веру в могущество чисел (которые в те времена понимались лишь как рациональные).

Это не помешало Ньютону создать анализ, не останавливаясь на деталях обоснования арифметики действительных чисел (ему, впрочем, хорошо известных). Автор настоящего курса стремился научить слушателей скорее искусству угадывать и предсказывать смелые обобщения (подобные переходу от колебаний с конечным числом степеней свободы к колебаниям сплошных сред), чем трудному ремеслу строгого обоснования этих результатов (включающего неизбежное исследование минимальной необходимой гладкости изучаемых объектов).

Сейчас в аналогичном теории колебаний сплошных сред и теории вещественных чисел положении находится квантовая теория поля, доставляющая наиболее поразительные математические результаты, но не их обоснования.

Задача* (Штурм, Гурвиц). Рассмотрим вещественную 2π-периодическую функцию

$$f(x) = \sum_{k \geqslant N} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

ряд Фурье которой начинается с N-х гармоник. Докажите, что число нулей функции f на окружности $\{x \bmod 2\pi\}$ не меньше, чем число нулей первой гармоники, входящей в ряд с ненулевым коэффициентом (т. е. не меньше, чем $2N$).

Пример. При $N = 1$ число нулей не меньше двух. Это — неравенство Морса: функция на окружности имеет не менее двух критических точек.

Литература

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1989.
2. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии.— М.: Наука, 1989.
3. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.