Лекция 7.

Теория колебаний. Вариационный принцип (продолжение)

Итак, кинетическая и потенциальная энергии струны (рис. 7.1) имеют вид: $T = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \dot{u}^2\,dx,\ \ U = \frac{k}{2}\int\limits_0^l (u_x)^2\,dx.$

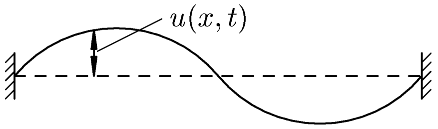


Рис. 7.1. Струна

Лагранжиан $L = T - U$, из вариационного принципа $\delta\int L\,dt = 0$ следует уравнение Эйлера–Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$, которое в нашем случае имеет следующий вид уравнения колебаний струны:

$$u_{tt} = k u_{xx}.$$

Эти результаты можно обобщить на многомерный случай. Пусть колеблется тело произвольной размерности, например, при $n = 2$ это мембрана. Мембрану, как и струну, можно представлять себе в виде предела системы колеблющихся шариков, соединенных пружинками, рис. 7.2.

В случае мембраны или многомерного тела кинетическая энергия выражается аналогично случаю струны: $T = \frac{1}{2}\iint\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx.$

Под интегралом имеем в виду соответствующий многомерный интеграл.

Заметим, что можно рассматривать колебания не только в одном направлении, а в нескольких, тогда u становится вектор-функцией (геометрически: положение равновесия отвечает нулевому сечению расслоения, а само расслоение может быть любым). Кинетическая энергия будет записываться той же формулой, только под интегралом — скалярный квадрат вектора скорости.

Как выражается потенциальная энергия? Сообщим ответ:

$$U = \frac{k}{2}\int (\nabla u)^2\, dx,$$

где $\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ — градиент. Этот интеграл называется *интегралом Дирихле.*

Дирихле занимался в основном теорией чисел, но он же заметил, что гармонические функции минимизируют этот интеграл (при соответствующих граничных условиях). Эта физическая идея — так называемый принцип Дирихле — оказалась мощнейшим орудием как для доказательства существования решений соответствующих задач, так и для их исследования и даже практического приближенного вычисления. Интересно отметить, что с этим интегралом и его обобщениями связаны попытки доказать гипотезу о нулях дзета-функции. Гипотеза состоит в том, что все нетривиальные комплексные нули дзета-функции лежат на одной вещественной прямой. Идея (восходящая по меньшей

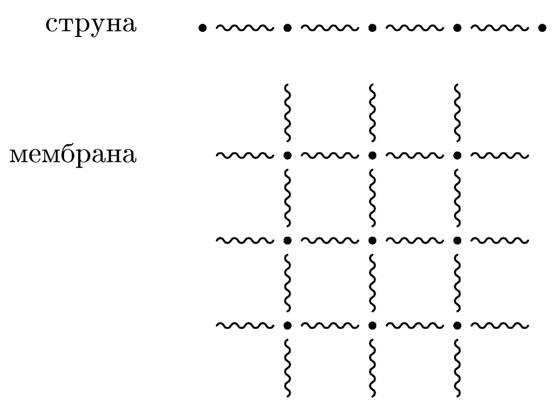


Рис. 7.2. Аппроксимации струны и мембраны

мере к Гильберту) заключается в том, чтобы найти задачу о колебаниях, через собственные числа которой выражаются нули дзета-функции. Вещественность собственных чисел влечет их расположение на одной вещественной прямой в комплексной плоскости.

Задача. Найти минимум интеграла Дирихле на пространстве гладких функций на сфере.

Р е ш е н и е. Для константы интеграл равен нулю, а для непостоянной функции он положителен. Следовательно, минимум равен нулю и достигается только на постоянных функциях.

Уравнения Эйлера–Лагранжа имеют в многомерном случае вид $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\Delta u$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа в декартовых координатах. На самом деле оператор Лапласа зависит не от координат, а определяется евклидовой структурой пространства, как показывает следующая

Теорема 1. $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

Прежде, чем доказать теорему, напомним определения участвующих здесь понятий и убедимся в их инвариантности.

Пусть u — функция, тогда ее дифференциал du — 1-форма, действующая на касательный вектор ξ: $du|_x(\xi) = (a_x, \xi)$, поскольку в евклидовом пространстве любая 1-форма есть скалярное произведение на фиксированный в данной точке вектор. Этот вектор называется вектором градиента функции u в точке x: $a_x = \operatorname{grad} u|_x$. Таким образом, градиент определяется евклидовой структурой пространства (более общо, римановой метрикой многообразия).

В любых координатах имеем: $du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n\right)(\xi) = \sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\xi_i$. В декартовых ортонормированных координатах это запись скалярного произведения векторов ξ и $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, так что в декартовых ортонормированных координатах градиент u имеет компоненты $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

Упражнение. Найдите компоненты $\operatorname{grad} u$ в полярных координатах на евклидовой плоскости и в сферических координатах в евклидовом трехмерном пространстве.

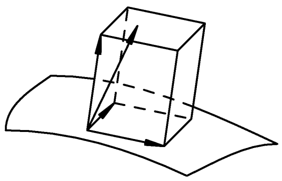


Рис. 7.3. Поток векторного поля через поверхность

Дивергенция векторного поля определена на многообразии, на котором задан элемент объема, в частности, на римановом многообразии.

Рассмотрим векторное поле $v = \sum v_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ и соответствующий уравнению $\dot{x} = v(x)$ фазовый поток в n-мерном пространстве.

Напомним определение потока поля через некоторую поверхность. Обозначим форму объема через $\tau = \tau^n$. Форма объема τ^n — n-форма. Рассмотрим соответствующую вектору v $(n-1)$-форму $i_v\tau$. Эта форма получается подстановкой в τ^n на первое место вектора v, остальные $n-1$ мест — свободны.

Потоком поля v через $(n-1)$-мерную ориентированную гиперповерхность называется интеграл от этой формы по гиперповерхности.

Пример. Пусть в декартовых ортонормированных координатах $\tau = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Тогда

$$i_v\tau = v_1\, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - v_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots$$
$$\dots \pm v_n\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}.$$

В частности, при $n = 3$ для поля скоростей системы $\dot{x} = P$, $\dot{y} = Q$, $\dot{z} = R$ получаем: $i_v\tau = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$.

Поток имеет ясный гидродинамический смысл: количество фазовой жидкости, протекающей через поверхность за единицу времени, рис. 7.3.

Рассмотрим поток $\bar{V}_\varepsilon$ поля v через малую сферу радиуса ε с центром x. *Дивергенцией* поля v в точке x называется предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\bar{V}_\varepsilon}{\tau(\varepsilon)}$, где $\tau(\varepsilon)$ — объем шара. Смысл дивергенции — «плотность источника» в данной точке.

Итак, дивергенция определена, если задана форма объема. В частности, дивергенция определена в римановых и евклидовых пространствах. Дивергенция поля v на многообразии с элементом объема τ связана с внешним дифференцированием $(n-1)$-форм (вовсе не зависящим

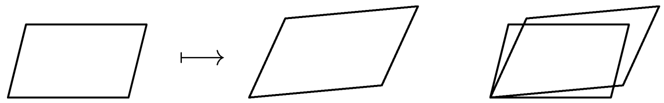


Рис. 7.4. Малое линейное преобразование элемента объема

от системы координат) соотношением

$$(\operatorname{div} v)\tau = d(i_v \tau).$$

Теорема 2. *Дивергенция поля v в декартовых ортонормированных координатах есть след матрицы Якоби поля v:*

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

Доказательство. Рассчитаем новое положение точки x при движении по фазовому потоку поля v за малое время ε: $x \mapsto x + \varepsilon v(x) + o(\varepsilon)$. Таким образом, элемент объема подвергается малому линейному преобразованию, рис. 7.4.

Лемма. *В первом приближении вклад в изменение объема параллелепипеда вносят изменения векторов только в своем собственном направлении.*

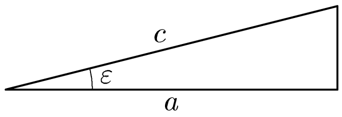
Упражнение. Докажите лемму.

Поскольку в определении дивергенции вместо сферы можно взять параллелепипед, натянутый на n векторов, при вычислении потока надо найти приращение его объема при малом сдвиге вдоль v, в главном члене по лемме получится след матрицы Якоби v, умноженный на объем исходного параллелепипеда; при делении и переходе к пределу получится, что дивергенция равна этому следу. Теорема 2 доказана.

В декартовых координатах элементарным вычислением получаем, что $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$. Этой формулой оператор Лапласа определен на любом римановом многообразии.

Задача. Вычислить оператор Лапласа функции, заданной на окружности $x^2 + y^2 = 1$ на евклидовой плоскости.

Ответ. $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$, где $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$.



$$b = a\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad c = a + O(\varepsilon^2)$$

Рис. 7.5. Гипотенуза практически равна катету

Формула $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ справедлива лишь в декартовых ортонормированных координатах, в других координатах оператор выражается по-другому, даже если пространство евклидово.

Упражнение. Запишите оператор Лапласа в полярных, цилиндрических и сферических координатах.

Замечание. Как будет показано ниже, геометрический смысл интеграла Дирихле — главный член приращения площади мембраны. Замечательно, что он квадратичный.

Это совершенно очевидно в одномерном случае: при малом угле разность между катетом и гипотенузой имеет второй порядок малости (проверьте), рис. 7.5. Этот простой факт имеет большие последствия и важные приложения.

Примеры. 1. Возвращаясь домой по синусоиде, вы увеличите себе путь совсем немного (примерно на 20%), так как в увеличение пути вносят вклад лишь участки с большим наклоном, а их доля невелика, рис. 7.6.

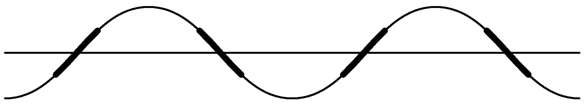


Рис. 7.6. Синусоида не намного длиннее прямой

2. Немного отклонив двигатели от продольной оси самолета, можно спасти хвостовое оперение от сгорания в струе, при этом ослабление тяги имеет лишь второй порядок малости, рис. 7.7. Например, даже при огромном отклонении в 6° получаем $\varepsilon \approx 0{,}1$, при этом потеря тяги составляет всего 0,5%.

3. Кеплер при обработке результатов астрономических наблюдений Тихо Браге (которые велись невооруженным глазом; еще в конце XVII в. надо было доказывать, что наблюдения в телескоп дают не меньшую точность) вначале думал, что Марс движется вокруг Солнца

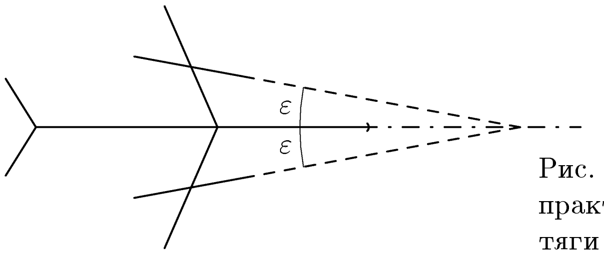


Рис. 7.7. Поворот двигателей практически не меняет силу тяги

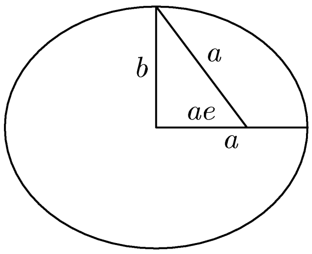


Рис. 7.8. Эллипс с малым эксцентриситетом почти неотличим от окружности

по окружности, но Солнце находится не в центре. Действительно, рассмотрим эллипс с полуосями a, b и малым эксцентриситетом e, рис. 7.8. Тогда $b = a\sqrt{1-e^2} = a(1-e^2/2+\dots)$. При малом e (для Марса примерно 1/10) разницу между эллипсом и окружностью заметить трудно, а разница между центром и фокусом хорошо заметна.

Это подтверждается и таким простым опытом. Капните в круглую чашку с чаем каплю близко к центру. Волны, отразившись от стенок, соберутся в симметричной относительно центра точке, рис. 7.9.

О б ъ я с н е н и е. Если в эллиптической чашке капнуть точно в фокус, волны после отражения соберутся в другом фокусе. Окружность очень мало отличается от эллипса с малым эксцентриситетом. Поэтому волны собираются во втором фокусе этого близкого эллипса (но не точно, а немного размыто). При тщательном наблюдении можно заметить и вторичное собирание волн в исходной точке.

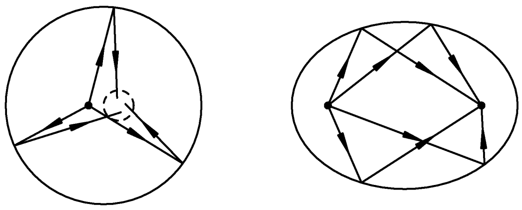


Рис. 7.9. Собирание волн в круге и эллипсе

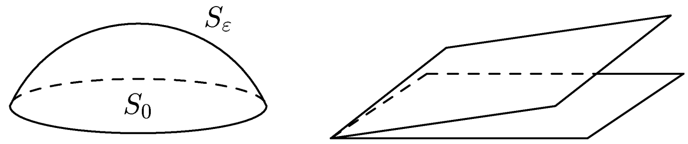


Рис. 7.10. Изменение площади мембраны

Теперь объяснение самого факта второго порядка малости различия: прямая дает минимум функционала длины, поэтому приращение и не может быть первого порядка малости.

Вернемся к геометрическому смыслу интеграла Дирихле. Утверждается, что это главная часть приращения площади, т. е. если S_0 — площадь мембраны в положении равновесия, а S_ε — площадь при отклонении εu, то нам надо доказать, что новая площадь S_ε равна $S_0 + \frac{\varepsilon^2}{2}\int (u_x)^2\,dx + o(\varepsilon^2)$, рис. 7.10. Посмотрим на изменение площади малой площадки. Выберем удобную систему координат: одна ось идет вдоль $\operatorname{grad} u$, другая — ортогонально, рис. 7.11. Тогда новая площадь есть произведение новых длин, при этом одна из длин не изменилась, а другая вычисляется, как в одномерном случае, в итоге $S_\varepsilon = S_0(1 + (\varepsilon^2/2)(\nabla u)^2 + \ldots)$.

Остается проинтегрировать приращение по всей мембране.

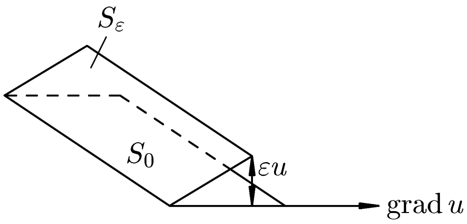


Рис. 7.11. Вычисление приращения площади

Можно все вычисления провести в допредельной системе шариков на пружинках, рис. 7.12.

Проделаем гомотопию αu от положения равновесия до отклонения εu, при этом надо найти член порядка ε^2 в выражении для потенциальной энергии, т. е. работы по созданию такого отклонения. Вид сбоку в двух ортогональных направлениях такой же, как в одномерном случае, рис. 7.12, поэтому равнодействующие сил уже вычислены и представляют собой (при надлежащем выборе единиц измерения) вторые разности

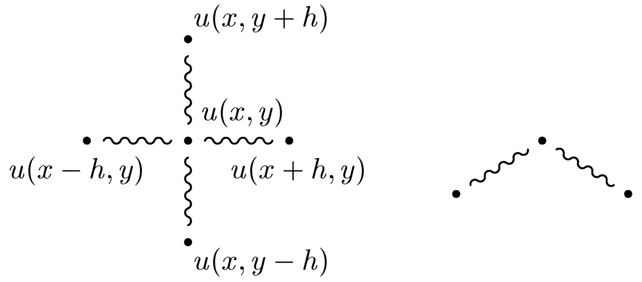


Рис. 7.12. Вычисление потенциальной энергии мембраны

со знаком минус:

$$-u(x-h,y)+2u(x,y)-u(x+h,y), \quad -u(x,y-h)+2u(x,y)-u(x,y+h).$$

При переходе к пределу получим члены вида $-u_{xx}$, $-u_{yy}$. При интегрировании по α от 0 до ε получим

$$-\int \alpha \Delta u \, d\alpha u = -u\Delta u \int \alpha \, d\alpha = -\frac{\varepsilon^2}{2} u \Delta u.$$

Наконец, при интегрировании по области имеем (с точностью до числового множителя)

$$U = -\iint \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) u \, dx \, dy.$$

Выполним интегрирование по частям (сначала по x)

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u \, dx = -\int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \, dx + u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Учтем, что на границе $u = 0$ (мембрана закреплена), тогда подстановка нулевая. Аналогично выполняется интегрирование по y. В итоге получим

$$U = \iint (\nabla u)^2 \, dx \, dy.$$

Таким образом, потенциальная энергия пропорциональна приращению площади. Уравнение Эйлера – Лагранжа в этом случае, как мы видели, — волновое уравнение.

Попутно доказана формула

$$\int (\nabla u)^2\,dx = -\int \Delta u\,u\,dx \quad (u|_{\partial\Omega} = 0).$$

Кроме того, мы вычислили силу, которая оказалась равна $-\Delta u$, поэтому волновое уравнение можно интерпретировать как уравнение Ньютона. Но можно просто честно посчитать $\dfrac{\partial L}{\partial q}$, раз нам известны T, U. Это квадратичные формы на бесконечномерном пространстве функций ($\dot q = u_t,\ \ q = u$).

Найдем вариацию $\delta \displaystyle\int \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$. Пусть $u = u_0(x) + \varepsilon\xi(x),\ \xi|_{\partial\Omega} = 0$.

Нам надо найти коэффициент при ε в разложении интеграла и представить его как бесконечномерное скалярное произведение:

$$\int \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 dx + \varepsilon \int \frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x}dx + \ldots =$$

$$= -\varepsilon \int \xi \Delta u\,dx + \int \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 dx + \ldots$$

(при интегрировании по частям мы воспользовались тем, что $\xi|_{\partial\Omega} = 0$). Первый из этих интегралов и есть скалярное произведение. Так что сила действительно равна $-\Delta u$.

Все эти рассуждения верны и для риманова многообразия.

Замечательный факт заключается в том, что волновым уравнением описывается широкий класс задач. Волновое уравнение можно получить исходя из предположения, что данная вариационная задача удовлетворяет некоторым условиям аксиоматического характера (правда, само вариационное происхождение задач математической физики остается без убедительного объяснения). Вот эти аксиомы:

1. Кинетическая энергия T есть квадратичная форма от скоростей, что означает *пространственную однородность* системы. Впрочем, в случае переменной плотности T выражалась бы похожей формой.

Ограничимся случаем однородной среды, где T есть интеграл от $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2$. Укажем, каким аксиомам должна удовлетворять U, чтобы задача описывалась волновым уравнением.

2. Квадратичная форма U аддитивна и локальна, что физически означает отсутствие дальнодействия. Квадратичная форма может

быть записана в виде $U = \frac{1}{2}(Au, u)$, где A — линейный оператор, а скобка означает скалярное произведение (т. е. интеграл от произведения функций). Оператор A называется *локальным*, если значение функции Au в точке вычисляется через конечное число производных функции u в этой точке.

В нашем случае взаимодействуют только две соседние точки, что приводит к появлению в интеграле Дирихле только производных первого порядка u_x (а в соответствующем симметрическом операторе $A = -\Delta$ — только вторых производных). Взаимодействие большего числа точек приведет к появлению старших производных. Например, в задаче об изгибании тонкой пластины в уравнении появится оператор $\Delta^2 u$. В случае мембраны прирост энергии происходит только за счет растяжения, но не изгибания. В случае пластинки энергия затрачивается и на изгибание. Это тоже пример локальной системы, но со старшими производными. Если же в форму потенциальной энергии войдут только производные первого порядка, то она будет иметь общий вид:

$$\sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} u + cu^2.$$

В каких случаях соответствующий симметрический оператор превращается в оператор Лапласа? Дальнейшие ограничения на оператор, действующий на функции в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

3. Однородность (инвариантность относительно сдвигов):

$$\Delta(u(x + a)) = (\Delta u)(x + a).$$

4. Изотропность (инвариантность относительно вращений g):

$$\Delta(u(gx)) = (\Delta u)(gx).$$

Квадратичная форма от вектора градиента задает эллипсоид уровня в касательном пространстве в каждой точке. Пространство изотропно, если этот эллипсоид — сфера, т. е. свойства мембраны не зависят от поворота. Встречаются и неизотропные среды.

Из однородности и изотропности вытекает, что $b = 0$, поскольку линейная часть оператора есть скалярное произведение b на $u\frac{\partial u}{\partial x}$, и если бы b был ненулевым, то свойства мембраны изменились бы при некотором повороте.

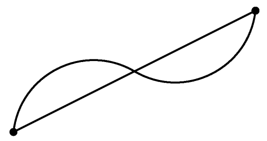


Рис. 7.13. Задача Дирихле для струны

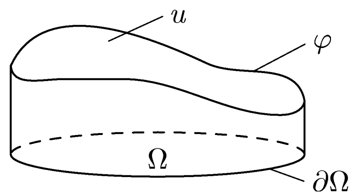


Рис. 7.14. Задача Дирихле для мембраны

Член cu^2 может присутствовать в однородной изотропной среде, например, он присутствует в задаче о колебании воздушного шара (тонкой оболочки) вокруг положения равновесия. Отсутствие этого члена связано со следующим ограничением.

5. Метрика пространства (x, u) не меняется при сдвигах вдоль оси u.

Все эти ограничения приводят к тому, что в уравнении останется лишь оператор Лапласа.

Рассмотрим теперь задачу о положениях равновесия — критических точках потенциальной энергии. Если $u|_{\partial\Omega} = 0$, то 0 — устойчивое положение равновесия, это минимум интеграла Дирихле. Но можно рассматривать другие граничные условия. Например, рассмотрим струну с концами, закрепленными в произвольных точках, рис. 7.13.

В этом случае минимум потенциальной энергии достигается на прямой.

Поставим аналогичную задачу для мембраны: $\Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = \varphi$. Это *задача Дирихле для уравнения Лапласа*, рис. 7.14. Решения уравнения $\Delta u = 0$ называются *гармоническими функциями* в области Ω. Решение задачи Дирихле мы будем искать в классе функций, непрерывных на замыкании Ω и дважды дифференцируемых внутри.

Имеется общий прием нахождения минимума потенциала U. Для этого надо двигаться против градиента, т. е. вдоль векторного поля $\dot{q} = -\nabla U$. В случае положительно определенной квадратичной формы U таким способом обязательно придем к минимуму. В нашем случае уравнение градиентного спуска имеет вид $(\dot{q} =)\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u\ (= -\operatorname{grad} U)$. В частности, для струны получим уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial t} = ku_{xx}$, которое называется *уравнением диффузии* или *теплопроводности*.

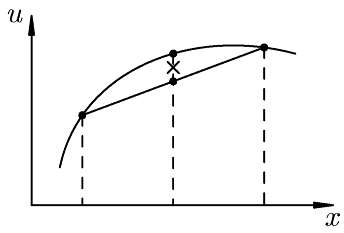


Рис. 7.15. Выравнивание температур узлов

Уравнение теплопроводности получается в задаче о распространении тепла. Рассмотрим нагреваемые элементы, расположенные в узлах решетки. В каждый следующий момент времени значение температуры в узле — некоторое взвешенное среднее значений в пяти точках, рис. 7.15. Для простоты нарисуем одномерный случай (тот же рисунок).

Усреднив, получим новую функцию, затем к ней применим ту же процедуру и т. д. Это не что иное, как реализация алгоритма градиентного спуска. Итак, распространение тепла происходит так же, как градиентным методом ищется минимум потенциальной энергии.

Если уравнение интерпретировать как уравнение диффузии, то u отвечает за плотность распределения частиц. Оператор Лапласа возникает исходя из описанных условий инвариантности системы. Между прочим, в этом случае член cu в уравнении (соответствующий $cu^2/2$ в потенциальной энергии) часто физически оправдан: он отвечает за рождение или смерть частиц в зависимости от знака c.

Способ отыскания стационарных решений (положений равновесия), таким образом, описан.

В специальных случаях удается найти явные решения. Сначала займемся гармоническими функциями. Как решения линейного уравнения $\Delta u = 0$, они образуют линейное пространство. Попытаемся удовлетворить граничным условиям. При $n = 1$ гармонические функции — линейные, их пространство двумерно, базис образуют функции $(1, x)$. Можно провести прямую (единственную) через две заданные точки и удовлетворить граничным условиям.

Пусть $n = 2$.

Теорема 3. *Отождествим вещественную плоскость с комплексной прямой. Пусть* $f(z)$ *— голоморфная функция. Тогда* $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ *— гармонические функции.*

Упражнение. Докажите теорему. Воспользуйтесь уравнениями Коши – Римана.

Задачи. 1. Пусть $\varphi(x, y)$ — ориентированный угол, под которым виден из точки (x, y) фиксированный отрезок на плоскости. Докажите, что $\varphi(x,y)$ — гармоническая вне концов данного отрезка (многозначная) функция от (x,y).

2. Постройте ограниченную функцию, гармоническую внутри круга, непрерывную всюду, кроме двух данных точек на границе, равную 0 на одной из дуг, на которые точки делят окружность, и 1 — на другой.

3. Аналогичная задача, когда окружность разбита на n дуг и даны n значений.

4. Найдите все гармонические функции на сфере (т. е. решите уравнение $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = 0$, где u — гладкая функция на сфере в $\mathbb{R}^n$).

Указание. Если функция не константа, то ее интеграл Дирихле не 0, и функция не является критической точкой интеграла Дирихле. Значит, $\Delta u \neq 0$.

5. На вершинах куба в момент 0 задана функция. В каждый следующий момент $(i+1)$ значение в каждой точке заменяется средним арифметическим значений в соседних вершинах в предыдущий момент (i). Найти предел получающейся последовательности функций при $i \to +\infty$.

Указание. Предельная функция — «гармоническая».

6. Пусть u — однородная функция степени 0 в $\mathbb{R}^n$ (т. е. $u(\lambda x) = u(x)$ при любом x и любом $\lambda > 0$). Докажите, что $r^2\Delta u = \tilde{\Delta} u$, где $\tilde{\Delta}$ на единичной сфере — оператор Лапласа $\operatorname{div}\operatorname{grad}$ (т. е. $(\tilde{\Delta} u)_{r=1} = \operatorname{div}\operatorname{grad}(u|_{r=1})$).

7. Пусть u — однородная функция степени k в $\mathbb{R}^n$ (т. е. $u(\lambda x) = \lambda^k u(x)$ при любом x и любом $\lambda > 0$). Докажите, что

$$\tilde{\Delta} u = r^2 \Delta u - (k^2 + (n-2)k)u,$$

где $\tilde{\Delta} u$ — однородная функция степени k, совпадающая при $r = 1$ с $\operatorname{div}\operatorname{grad}(u|_{r=1})$.

В частности, для однородных функций степени k на плоскости $(n = 2)$

$$\tilde{\Delta} u = r^2 \Delta u - k^2 u,$$

а для однородных функций степени k в трехмерном пространстве

$$\tilde{\Delta} u = r^2 \Delta u - (k^2 + k)u.$$

8. Найдите все гармонические в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ однородные функции, зависящие только от r.

У к а з а н и е. Случай $n = 2$ — особый.

9*. Докажите, что число областей, на которые нулевая линия уровня k-й собственной функции оператора Лапласа в комплексной области (с граничными условиями Дирихле) делит эту область, не больше k. (Этот результат верен на компактных римановых многообразиях любой размерности, например, на сферах.)

Например, первая собственная функция (с наименьшим по модулю собственным числом) вовсе не меняет знака (она обращается в ноль лишь на границе области).

У к а з а н и е. Отношение интеграла Дирихле к интегралу квадрата собственной функции на каждой из N компонент дополнения к нулевой линии уровня собственной функции одинаково. Поэтому существует N-мерное пространство функций, на котором это отношение квадратичных форм такое же, как для собственной функции.

Из теорем лекции 6 об осях эллипсоидов следует, что номер оси k не меньше размерности N.

10. Рассмотрим собственные функции оператора Лапласа на торе размерности n:

$$\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = -\lambda u, \quad (x_j \bmod a_j) \in T^n.$$

Обозначим через $N(E)$ число собственных функций, для которых $\lambda \leqslant$ $\leqslant E$. Исследовать поведение $N(E)$ при $E \to \infty$.

У к а з а н и е. Оператор Лапласа коммутирует со сдвигами. Поэтому собственными функциями являются экспоненты

$$e_k(x) = e^{2\pi i(k,x)}, \quad (k,x) = \sum k_j x_j / a_j, \ k_j \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, вопрос сводится к подсчету числа целых точек в большом эллипсоиде.

О т в е т. Рассмотрим в пространстве кокасательного расслоения тора T^*T^n область $\Omega(E)$, заданную неравенством $\sum \xi_j^2 \leqslant E$ (ξ_j — координаты формы $\sum \xi_j \, dx_j$). Тогда при $E \to \infty$

$$N(E) \sim (2\pi)^{-n} \operatorname{Vol} \Omega(E) = \mathrm{const} \cdot E^{n/2}.$$

Замечание 1. Аналогичная *формула Вейля* верна на любом многообразии и для любого «эллиптического» оператора, например, для оператора второго или высшего порядка с переменными коэффициентами $P\left(x, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right) = \lambda u$. Область Ω в этом случае определяется условием $\tilde{P}(x,\xi) \leqslant E$, где $\tilde{P}$ — сумма старших однородных членов по ξ многочлена P («главный символ»).

Замечание 2. Следующие члены асимптотики $N(E)$ исследовать трудно, даже для обычного оператора Лапласа при $a_j = 2\pi$. Беда в том, что на поверхности сферы $\sum k_j^2 = E$ может оказаться много целых точек (иными словами, собственное число E может иметь большую кратность) — эта возможность реализуется, например, в случае оператора Лапласа на сфере S^2, для которого собственное число E имеет кратность порядка $\sqrt{E}$ (см. лекцию 11).