Лекция 8.

Свойства гармонических функций

В этой лекции мы будем заниматься свойствами гармонических функций в основном на плоскости, некоторые теоремы будут доказаны в n-мерном случае, а начнем с трехмерного.

Рассмотрим функцию $u = 1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, (x, y, z) — декартовы координаты.

Упражнение. Проверьте, что функция u гармоническая.

Этот простой пример на самом деле является очень важным. Дело в том, что две важнейшие силы, изучаемые в физике, — сила тяготения и кулоновская сила — устроены следующим образом: они действуют вдоль соединяющей частицы прямой, а по абсолютной величине обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними.

Но тогда потенциал, градиентом которого является сила притяжения к одной частице, пропорционален $1/r$ — гармонической функции. Линейная комбинация гармонических функций является гармонической функцией. Поэтому потенциал силы притяжения к конечному числу частиц является гармонической функцией.

От конечного числа частиц можно перейти к непрерывно распределенной массе (заряду) с плотностью $\rho(x)$ в некоторой области D. Тогда потенциал поля притяжения к этому телу в некоторой точке x вычисляется по формуле

$$\int\limits_D \frac{\rho(y)\,dy}{|x-y|},$$

рис. 8.1, причем эта функция от x гармоническая в области, свободной от массы (или зарядов). Таким образом, фундаментальные законы природы связаны с гармоническими потенциалами.

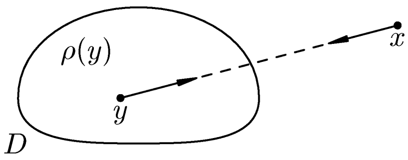

Рис. 8.1. Гравитационное поле

Попытаемся понять без вычислений, почему функция $u = 1/r$ гармоническая, т. е. почему $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = 0$.

Прежде всего $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$ в точке x зависит лишь от r — расстояния точки x до 0, т. е. $\operatorname{div}\operatorname{grad} u(x) = f(\|x\|)$. Далее, рассмотрим область, расположенную между концентрическими сферами радиусов r и R, $r < R$. Вычислим поток $\operatorname{grad} u$ через границу этой области. Градиент u направлен к точке 0 и ортогонален рассматриваемым сферам. Площадь внешней сферы в $(R/r)^2$ раз больше площади внутренней сферы. Но величина градиента на внешней сфере ровно в то же число раз меньше, чем на внутренней (сила обратно пропорциональна квадрату расстояния). Значит, потоки градиента через внутреннюю и внешнюю сферу в точности равны, т. е. поток градиента через границу области в точности равен нулю. Откуда вытекает равенство нулю $\operatorname{div}\operatorname{grad}(1/r)$. Впрочем, конечно, равенство $\Delta\,(1/r) = 0$ можно проверить дифференцированием.

Теперь перейдем к случаю плоскости. Рассмотрим голоморфную функцию $f(z)$ на плоскости или в области, тогда по ней легко строятся гармонические функции: $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$, $\ln|f(z)|$, $\arg f(z)$ (последние две — вещественная и мнимая части голоморфной функции $\ln f(z)$) и т. п. Верно и обратное: всякая гармоническая функция получается таким способом.

Теорема 1. *Всякая гармоническая функция в односвязной области плоскости есть вещественная часть голоморфной функции, которая определена в этой области с точностью до аддитивной мнимой постоянной.*

Доказательство. Ищем голоморфную функцию в виде $f = u + iv$, гармоническая функция u нам задана, а v надо найти. В силу условий Коши–Римана $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, тогда $dv = \alpha$, где $\alpha = (-u_y)\,dx + u_x\,dy$. В односвязной области функция v с таким дифференциалом существует, если $d\alpha = 0$. В этом случае можно определить

$v(x)$ как $\int\limits_{x_0}^{x} \alpha$, и интеграл не будет зависеть от пути в области, так как в силу формулы Стокса интеграл по любому замкнутому пути будет нулевым. Итак, осталось проверить выполнение условия: $d\alpha = 0$. Но $d\alpha = (u_{xx} + u_{yy})\, dx \wedge dy = 0$, поскольку u — гармоническая. Значит, функция v существует и определена с точностью до вещественной аддитивной постоянной.

Мы видим, что на плоскости теории гармонических и аналитических функций по существу совпадают, первые — вещественные части последних. Это определяет роль аналитических функций в математической физике, с их помощью можно получить явные решения многих задач, например, задачи об обтекании крыла потоком воздуха (Жуковский).

Теорема 2 (теорема о среднем). *Среднее значение гармонической функции на окружности равно значению в центре* (рис. 8.2): $\dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} u\, d\varphi = u(0)$.

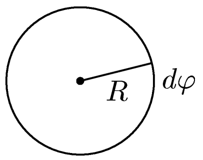

Рис. 8.2. Теорема о среднем

Ниже мы докажем аналогичную теорему в многомерном случае и увидим, что это свойство гармонической функции можно принять за ее определение.

Доказательство. Как мы знаем, $u = \operatorname{Re} f$, где f голоморфна. Рассмотрим представление интегралом Коши:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Это равенство верно для любой кривой γ, охватывающей точку 0.

В вещественной теореме мы будем явно использовать, что контур γ — окружность. Запараметризуем точку окружности: $t = Re^{i\varphi}$, тогда $\dfrac{dt}{t} = \dfrac{iRe^{i\varphi}\, d\varphi}{Re^{i\varphi}} = i\, d\varphi$. Подставим все в интеграл Коши:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(t)\, d\varphi, \quad f = u + iv.$$

Получим нужное нам равенство отдельно для вещественной и мнимой частей. Теорема доказана.

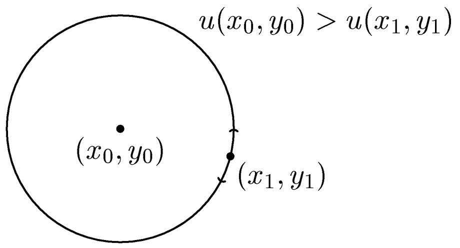

Рис. 8.3. Принцип максимума

В многомерном случае теории гармонических и аналитических функций расходятся.

Следствия из теоремы о среднем

1. Принцип максимума. *Гармоническая функция не достигает экстремума внутри области, точнее, пусть* $u(x_0,y_0) = \max u(x,y)$. *Тогда если* $(x_0,y_0) \in D$, *то* $u \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Пусть точка максимума (x_0,y_0) — внутренняя. Возьмем малую окружность с центром в ней (рис. 8.3). Если значение в некоторой точке (x_1,y_1) окружности меньше, чем в (x_0,y_0), то по непрерывности оно меньше и на целой дуге, тогда нарушится теорема о среднем. Значит, функция постоянна в окрестности точки (x_0,y_0). Другими словами, множество точек области, в которых $u(x_0,y_0) = \max u(x,y)$, открыто. Но это множество, очевидно, замкнуто, т.е. множество внутренних точек максимума либо пусто, либо совпадает с компонентой связности. Получим, что функция постоянна на всей компоненте связности, содержащей (x_0,y_0).

Это доказательство основано лишь на теореме о среднем. Так что принцип максимума будет доказан и в многомерном случае, как только мы докажем многомерную теорему о среднем.

С точки зрения теории аналитических функций принцип максимума является проявлением локального сохранения области. Действительно, если бы вещественная часть аналитической функции могла достигать экстремума во внутренней точке, нарушился бы принцип сохранения области, рис. 8.4.

2. Единственность. *Непрерывное решение задачи Дирихле в связной ограниченной области единственно.*

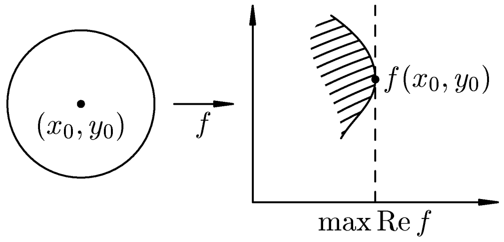

Рис. 8.4. Принцип максимума и принцип сохранения области

Доказательство. Разность двух решений есть функция гармоническая внутри области, тождественно равная нулю на границе. Поскольку область ограничена, максимум и минимум этой разности достигаются (либо внутри области, либо на границе). Если максимум или минимум достигаются внутри, то разность константа и, значит, равна нулю. Если на границе, то разность имеет равные нулю максимум и минимум и тоже равна нулю. Итак, по принципу максимума разность тождественно равна нулю в области.

Заметим, что единственность решения задачи Дирихле имеет место для непрерывных функций, удовлетворяющих теореме о среднем, т.е. существует не более одной непрерывной функции, удовлетворяющей теореме о среднем, с заданным значением на границе ограниченной области.

Замечание. В неограниченных областях решение неединственно. Например, функция x гармонична в полуплоскости $x > 0$, непрерывна в замыкании этой полуплоскости и равна нулю на ее границе, но не внутри.

Теорема 3. *Непрерывная функция, удовлетворяющая теореме о среднем, является гармонической.*

Доказательство. Рассмотрим в области задачу Дирихле (в обычном смысле, т.е. для гармонической функции) с граничным значением, равным значению нашей функции. (Позднее мы докажем, что решение существует.) Рассмотрим разность решения и нашей функции. Она нулевая на границе, удовлетворяет теореме о среднем, значит, тождественно равна нулю в области.

Замечание. То, что ядро оператора Лапласа состоит из очень гладких функций — вещественных частей аналитических — заложено в природе этого оператора. Для волнового оператора картина совсем другая. Особенность данных Коши распространяется вдоль характеристик, так что решения волнового уравнения не более гладкие, чем начальные данные.

Перейдем к решению задачи Дирихле. Сначала построим решение для круга.

Схема первого способа. Накопим достаточный запас гармонических функций в круге. Рассмотрим на границе круга функцию $\cos n\varphi$. Есть ли аналитическая функция с такой вещественной частью? Есть, это функция

$$f_n(z) = \left(\frac{z}{R}\right)^n = \left(\frac{|z|}{R}\right)^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

У функции $if_n(z)$ вещественная часть на границе $|z| = R$ равна $\sin n\varphi$. Так что мы можем решить задачу Дирихле, если граничное условие имеет вид $\cos n\varphi$ или $\sin n\varphi$. Но мы знаем, что любое граничное условие можно разложить в ряд по этим функциям. Значит, сможем решить задачу и с любым граничным условием.

Реализуем первый метод в задаче Дирихле для круга. Разложим граничное условие в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Перейдя к полярным координатам, запишем гармоническое продолжение на круг функций $\cos n\varphi, \sin n\varphi$:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\alpha, \quad \left(\frac{r}{R}\right)^n \sin n\alpha.$$

В итоге получим решение в виде ряда:

$$u(r, \alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum \left(a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\alpha + b_n \left(\frac{r}{R}\right)^n \sin n\alpha\right). \qquad (*)$$

Наша цель — представить его в интегральной форме. Коэффициенты Фурье равны

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\beta)\cos n\beta\, d\beta,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\beta)\sin n\beta\, d\beta,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\beta)\, d\beta.$$

Подставим все в $(*)$, получим:

$$u(r,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\beta)\left[\sum\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\right] d\beta,$$

где

$$z = (r,\alpha), \quad \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\alpha-\beta) = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{t}\right)^n, \quad t = Re^{i\beta}.$$

Просуммируем геометрическую прогрессию:

$$\left(1 + \frac{z}{t} + \left(\frac{z}{t}\right)^2 + \ldots\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{1-\frac{z}{t}} - \frac{1}{2} = \frac{t}{t-z} - \frac{1}{2},$$

получим

$$u(r,\alpha) = \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\operatorname{Re}\left(\frac{t+z}{t-z}\right) d\varphi.$$

Преобразуем ядро: $\dfrac{t+z}{t-z} = \dfrac{(t+z)\overline{(t-z)}}{(t-z)\overline{(t-z)}}$.

Вещественная часть числителя есть $t\bar{t} - z\bar{z} = R^2 - r^2$, так как оставшееся выражение $t\bar{z} - \bar{z}t$ чисто мнимое.

Знаменатель $|t-z|^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha-\beta)$.

Получим *ядро Пуассона*

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha-\beta)}.$$

В итоге

$$u(r,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \beta)}\, f(\beta)\, d\beta.$$

Задача. Докажите, что этот интеграл получится при конформном преобразовании решения, полученного нами ниже для полуплоскости (второй способ).

По теореме Римана любую односвязную ограниченную область можно конформно отобразить на круг, а значит, можно получить решение задачи Дирихле в произвольной такой области при помощи ядра Пуассона, если конформное отображение известно.

Схема второго способа.

Задача. Пусть u — решение задачи Дирихле в области D_1, пусть $f\colon D_1 \to D_2$ — конформное отображение областей. Постройте решение задачи Дирихле в области D_2. Попробуйте убедиться в пригодности построенного решения без вычисления оператора Лапласа.

Мы знаем, что круг можно конформно отобразить на полуплоскость. Попробуем для полуплоскости решить задачу Дирихле: $\Delta u = 0$, $u(x,0) = g(x)$.

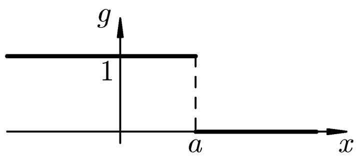

Рис. 8.5. Граничное условие задачи Дирихле в полуплоскости

Заметим сначала, что для простого граничного условия, изображенного на рис. 8.5 решение представляется функцией $\frac{1}{\pi}\varphi_a(x,y)$, где

$$\varphi_a(x,y) = \operatorname{Im}\ln(z-a) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x-a}.$$

Действительно, эта функция гармоническая на полуплоскости и удовлетворяет граничному условию рис. 8.5. Теперь рассмотрим функцию «угол»:

$$F_{ab}(x,y) = \frac{1}{\pi}(\varphi_b(x,y) - \varphi_a(x,y))$$

(см. рис. 8.6); она гармоническая на полуплоскости и удовлетворяет краевому условию $g(x) = 1$ при $a < x < b$ и $g(x) = 0$ при $x < a$ и $x > b$.

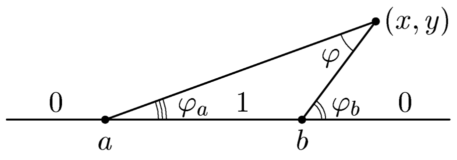

Рис. 8.6. Функция «угол»

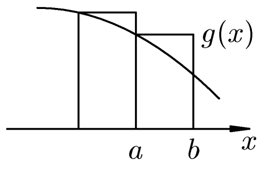

Рис. 8.7. Аппроксимация кусочнопостоянным краевым условием

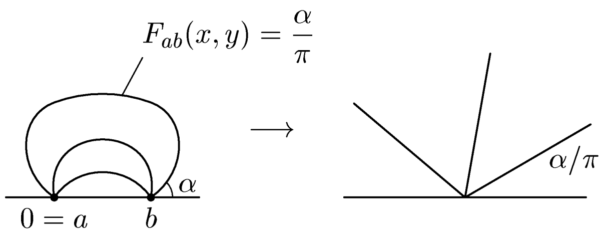

Рис. 8.8. Линии уровня функции F_{ab}

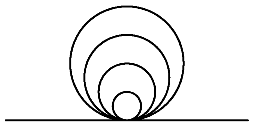

Рис. 8.9. Линии уровня ядра

Произвольное (скажем, непрерывное и равное 0 вне конечного отрезка) граничное условие $g(x)$ на прямой приблизим кусочно-постоянной функцией, рис. 8.7, соответствующая гармоническая функция $\sum \dfrac{F_{ab}g(a)(x-a)}{b-a}$.

Перейдем к пределу при измельчении разбиения, получим гармоническую функцию с граничным условием $g(x)$, записанную в виде такой интегральной формулы:

$$\int \lim_{b\to a} \frac{F_{ab}(x, y)}{b-a}\, g(a)\, da$$

Функция $\lim\limits_{b\to a} \dfrac{F_{ab}(x, y)}{b-a}$ в этом интеграле называется ядром. Изучим ее линии уровня. Картина линий уровня функции $F_{ab}(x, y)$ изображена на рис. 8.8, конформное отображение, оставляющее на месте 0 и переводящее a в ∞, переводит эту картину в простую картину линий уровня угла. При делении на длину отрезка и переходе к пределу картина линий уровня получится, как на рис. 8.9.

Понятно, что при этом дадут вычисления: производная по параметру a от функции $\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-a}$ есть

$$\frac{d}{da}\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x-a}\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(\frac{y}{x-a})^2}\frac{y}{(x-a)^2}=\frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-a)^2+y^2}$$

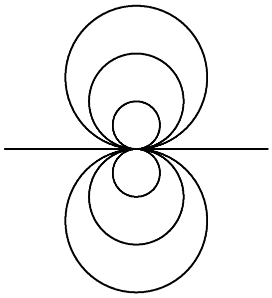

Рис. 8.10. Диполь

Окончательно,

$$u=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(x-a)^2+y^2}\,g(a)\,da.$$

Картина линий уровня ядра, рис. 8.10, хорошо нам известна из физики — это картина эквипотенциальных линий так называемого диполя (силовые линии диполя, ортогональные эквипотенциальным, образуют такую же картину).

Теорема о среднем в многомерном случае

Принцип максимума в многомерном случае. Приведем геометрическое объяснение того факта, что у гармонической функции не может быть строгих внутренних максимумов. Гармоническая функция минимизирует интеграл Дирихле $\int\limits_D(\nabla u)^2\,dx$.

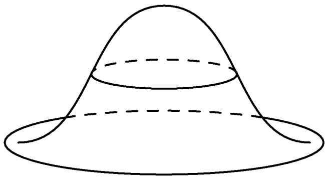

Рис. 8.11. Неминимизирующая интеграл Дирихле функция

Если бы был строгий внутренний максимум, график в его окрестности имел бы вид колокола, рис. 8.11. Срезав горб горизонтальной плоскостью, мы получили бы функцию с меньшим интегралом Дирихле. Так что функция с внутренним экстремумом не может минимизировать этот интеграл. Правда, это рассуждение не охватывает функции с нестрогими максимумами, как на рис. 8.12. Все же мы доказали, что функция, равная 0 на границе ограниченной области и минимизирующая интеграл Дирихле, тождественно равна 0 в области.

Принцип максимума в полном объеме вытекает из многомерной теоремы о среднем.

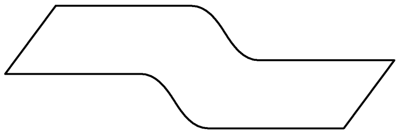

Рис. 8.12. Нестрогий максимум

Доказательство теоремы о среднем. Рассмотрим на сфере в $\mathbb{R}^m$ радиуса R с центром 0 элемент Ω_{m-1} телесного угла, т.е. проекцию элемента площади на сферу с тем же центром радиуса 1, рис. 8.13. Положим $f(R) = \int\limits_{|x|=R} u(x)\Omega_{m-1}$. Тогда

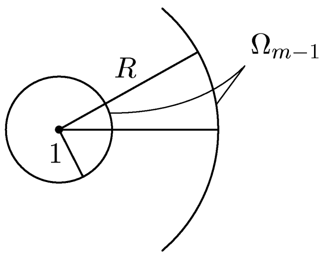

Рис. 8.13. К теореме о среднем

$$f'(R) = \int\limits_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n}\,\Omega_{m-1} = \int\limits_{|x|=R} (\nabla u, n)\,d\Omega_{m-1},$$

это есть поток градиента u через сферу, поделенный на R^{m-1}. Но если u гармоническая, то этот поток равен 0. Итак, $f'(R) = 0$, $f(r) = \text{const}$. Но если радиус R мал, то очевидно, что указанный интеграл примерно равен $u(0)$. Значит, $f(R) = u(0)$, что и требовалось.

Следствие. $u(0) = \dfrac{1}{V_R} \int\limits_{|x|\leqslant R} u(x)\,dx$, *где* V_R *— объем шара радиуса* R.

Действительно, чтобы проинтегрировать по шару, можно интегрировать по сфере фиксированного радиуса, а потом по радиусу.

Следствие. *Для гармонической функции в* n*-мерном случае верен принцип максимума.*

Следствие. *Решение задачи Дирихле в* n*-мерном случае единственно.*

Замечания

1. При выводе формулы Пуассона мы не проверяли сходимости до границы. Конечно, наши рассуждения показывают, что если существу-

ет формула для решения задачи Дирихле, то она должна иметь вид:

$$u(r,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{a}^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha-\beta)} f(\beta)\,d\beta. \qquad (**)$$

Надо все же аккуратно проверить, что для всякой непрерывной функции f функция u, определенная формулой $(**)$, действительно решает задачу Дирихле. Попробуйте сделать нужные оценки самостоятельно. (Если это вызовет затруднения, соответствующие рассуждения можно найти в учебнике А. Картана «Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных» на с. 168–170.)

2. Разумеется, второй вывод формулы Пуассона (для полуплоскости) имеет тот же недочет, что и первый — мы объясняем, как написать ядро Пуассона, но не проверяем, что полученное решение годится для любой непрерывной функции на границе.

3. При втором выводе формулы Пуассона мы сначала решаем задачу Дирихле для очень простых, но все же разрывных начальных данных. Найденные нами решения (связанные с функцией «угол») ограничены. Только для ограниченных решений можно гарантировать единственность решения задачи Дирихле с разрывными граничными данными, но этой теоремы мы не формулировали и не доказывали. Все это подчеркивает эвристичность нашего вывода формулы Пуассона.

4. Вот пример неединственности решения задачи Дирихле для разрывных начальных данных. Рассмотрим задачу Дирихле в полуплоскости $y \geqslant 0$ с начальным условием $u(x,0) \equiv 0$. Допускаются решения, разрывные в точке ∞. Рассмотрим любую целую функцию $f(r)$, вещественную на вещественной оси (например, $f(z) = z$, или $f(z) = \exp(z)$ и т. п.) Тогда функция $u = \operatorname{Im} f(z)$ дает решения нашей задачи. Отметим, что все эти решения, за исключением $u \equiv 0$, неограничены. Докажите это, используя теорию аналитических функций.

Докажите и более общий факт: две ограниченные функции, имеющие конечное число точек разрыва в замкнутом круге, гармоничные внутри круга и совпадающие на границе, тождественно совпадают в точках непрерывности.