# Лекция 9.

# Фундаментальное решение оператора Лапласа. Потенциалы

Взаимодействие математики и физики идет подчас странными путями. Дирак, один из крупнейших физиков 20-го века, так сформулировал стратегию теоретической физики: «Приступая к созданию физической теории, необходимо отбросить все предшествующие физические модели, а также основанную на них «физическую интуицию», которая есть не что иное, как набор предвзятых точек зрения». Надо, говорит Дирак, просто выбрать красивую математическую теорию и последовательно находить физические интерпретации ее следствиям, не боясь противоречия с предшествующими теориями.

«I learnt to distruct all physical concepts as the basis for a theory. Instead one should put one's trust in a mathematical scheme even if the scheme does not appear at first sight to be connected with physics. One should concentrate on getting an interesting mathematics.»

P. M. Dirac

(цитирую по книге P. Massani «N. Wiener», Birkhäuser 1990, с. 6).

Как это ни удивительно, весь опыт теоретической физики 20-го века (в отличие от физики 19-го века) подтверждает правоту Дирака. Замечено, что каждая новая физическая теория опровергает все предшествующие. А математические модели сохраняются.

Но сегодня мы займемся математической теорией, которая, наибо-

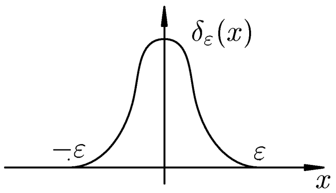


Рис. 9.1. $\delta$-образная функция

рот, долго не признавалась математиками, хотя физики давно ею свободно пользовались — теорией так называемых обобщенных функций. Наиболее важным примером обобщенной функции является $\delta$-функция Дирака. Мы рассмотрим ее сначала на прямой, затем в $\mathbb{R}^n$; ее можно было бы определить на любом многообразии. Это — математический аналог таких физических понятий, как точечный заряд и материальная точка.

Физическое «определение», против которого восстают ортодоксальные математики, такое: $\delta$-функция равна 0 всюду, кроме нуля, в нуле равна бесконечности, а интеграл от нее по всей прямой равен 1. Физики прекрасно умеют работать с такими определениями, математически явно бессмысленными.

Мы примем следующее определение, которое просто в применении, позволяет легко выяснять физический смысл и не такое нудное, как в «правильной математической теории обобщенных функций».

Наша $\delta$-функция переменной $x$ обозначается $\delta(x)$ и сосредоточена в нуле. Пусть $\delta(x)$ фигурирует в некоторой формуле. Это значит, что надо в эту формулу вместо $\delta(x)$ подставить $\delta$-образную функцию $\delta_\varepsilon(x)$, а затем перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

*$\delta$-образная функция* — это обычная гладкая функция со следующими свойствами:

1) Интеграл от нее по всей прямой равен 1.

2) Она неотрицательна.

3) Она сосредоточена в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, т.е. вне его равна нулю.

(Последние два условия можно ослабить.)

Типичный вид графика $\delta$-образной функции показан на рис. 9.1.

При переходе к пределу $\delta$-образную функцию можно фиксировать ($\varepsilon$ входит в формулу как параметр), а можно и не фиксировать, лишь бы семейство функций $\delta_\varepsilon(x)$ удовлетворяло условиям 1–3.

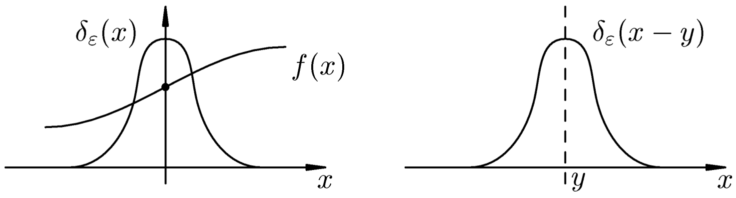


Рис. 9.2. К вычислению свертки с $\delta$-функцией

## Примеры и свойства

1. $\int \delta(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int \delta_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

2. $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$, так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(x) = 0$ при $x \neq 0$.

3. Вычислим $\int f(x)\delta(x)\,dx$, где $f(x)$ — непрерывная функция.

Основной вклад в интеграл $\int f(x)\delta_\varepsilon(x)\,dx$ дается выражением $\int f(0)\delta_\varepsilon(x)\,dx$, рис. 9.2, оно стремится к $f(0)$ при $\varepsilon \to 0$; разность между ним и всем интегралом тоже стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$ (это упражнение). В итоге $\int f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$.

4. Аналогично $\int f(y)\delta(x-y)\,dy = f(x)$.

Рассуждение то же самое, с учетом того, что $\delta_\varepsilon(x-y)$ — сдвиг функции $\delta_\varepsilon(x)$ из окрестности нуля в окрестность точки $y$, рис. 9.2.

Формула примера 4 имеет еще и следующую замечательную интерпретацию: произвольная функция $f$ есть непрерывная линейная комбинация сдвинутых $\delta$-функций $\delta(\cdot - y)$, сосредоточенных в точках $y$ с коэффициентами $f(y)$, так что $\delta$-функции $\delta(\cdot - y)$ образуют «континуальный базис» в пространстве функций на прямой. Полезно также понимать $\delta(\cdot - y)$ как плотность единичной точечной массы или заряда, сосредоточенного в точке $y$.

5. Однородность.

**Определение.** Функция $f$ называется *однородной степени* $d$, если $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ при любом положительном $\lambda$.

Выясним, однородна ли $\delta$-функция и какой степени. Для примера найдем $\delta(2x)$. Подставим $2x$ вместо $x$ в функцию $\delta_\varepsilon(x)$. Интеграл уменьшится в 2 раза. Перейдя к пределу, получим: $\delta(2x) = \dfrac{1}{2}\delta(x)$. Аналогичное рассуждение для любого множителя. Итак, функция $\delta(x)$ однородная степени $-1$, так же как функция $1/x$. Это сходство неслучайно, в некотором смысле эти функции родственные, правда, только в одномерном случае.

В $n$-мерном случае функция $\delta(x)$ — однородная степени $-n$. В этом можно убедиться еще и так: $\delta(x_1, \ldots, x_n) = \delta(x_1) \cdots \delta(x_n)$, поскольку соответствующее произведение $\delta$-образных функций дает $\delta$-образную функцию в $n$-мерном пространстве. Так как сомножители однородны степени $-1$, произведение, очевидно, однородно степени $-n$.

## Отступление. Принцип суперпозиции

Хотя этот принцип является основой всей так называемой линейной физики, по существу это простой факт из линейной алгебры.

Рассмотрим линейный оператор $L\colon V \to W$, отображающий одно линейное пространство в другое. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение $Lu = f$. Уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $f \in \operatorname{Im} L$, где $\operatorname{Im} L$ — образ $L$ — подпространство пространства $W$. Решения образуют аффинное подпространство в $V$, параллельное $\operatorname{Ker} L$, где $\operatorname{Ker} L$ — ядро $L$ — подпространство пространства $V$. А именно, пусть $u_ч$ — какое-то решение неоднородного уравнения; тогда его общее решение представляется в виде $u = u_ч + u_o$, где $u_o$ — общее решение однородного уравнения $Lu = 0$, рис. 9.3.

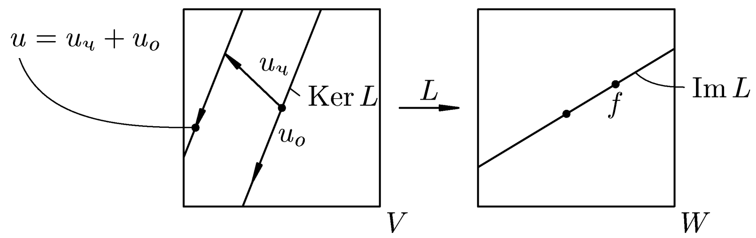


Рис. 9.3. Решения линейного неоднородного уравнения

Теперь сформулируем собственно принцип суперпозиции. Пусть $u_1, u_2$ — решения соответственно уравнений $Lu = f_1$, $Lu = f_2$. Тогда $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ — решение уравнения $Lu = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$; здесь $\alpha_1, \alpha_2$ — произвольные постоянные.

Физически: бросим в воду один камень, получим некоторую картину волн; бросим другой камень, получим другую картину волн. Бросим оба камня вместе. Тогда полученная картина волн такая же, как если бы мы сложили возмущения от бросания первого камня с возмущениями, происшедшими от бросания второго.

Доказательства всех вышеперечисленных утверждений очевидны в силу линейности оператора.

Теперь соединим принцип суперпозиции с возможностью разложения любой функции в суперпозицию $\delta$-функций. Получим следующее. Если мы хотим решить линейное дифференциальное уравнение, в правой части которого стоит произвольная функция $f$, то достаточно научиться решать это уравнение, где в правой части стоит $\delta$-функция, а затем применить принцип суперпозиции. Только вместо сумм придется писать интегралы.

Применим эти соображения к *уравнению Пуассона* $\Delta u = f$. Сначала надо решить уравнение $\Delta u = \delta(x)$. Конечно, решение этого уравнения не единственно. Действительно, ядро оператора $\Delta$ состоит из гармонических функций, так что к решению можно добавлять произвольную гармоническую функцию.

Из всех решений уравнения $\Delta u = \delta(x)$ можно выделить одно замечательное, называемое *фундаментальным*. Покажем, на каких основаниях можно его выделить.

Оператор Лапласа инвариантен относительно евклидовой группы движений (вращений и сдвигов). Действительно, лапласиан — это дивергенция градиента, а значит, он определяется только евклидовой структурой. С другой стороны, $\delta$-функция также сферически симметрична. Поэтому при повороте вокруг начала координат из решения уравнения $\Delta u = \delta$ получится снова решение этого уравнения. Среднее арифметическое двух решений тоже является решением. Вообще решением является любая линейная комбинация нескольких решений, у которых сумма коэффициентов равна единице. Поэтому можно провести усреднение решения по группе всех вращений вокруг начала координат, которая является компактной.

Например, при $n = 2$ группа $SO(2)$ поворотов плоскости изоморфна окружности $S^1$, усредняющая мера равна $\dfrac{1}{2\pi}d\varphi$.

При $n = 3$ группа вращений $SO(3)$ изоморфна вещественному трехмерному проективному пространству $\mathbb{R}P^3$. Она двулистно накрывается трехмерной сферой (группой единичных кватернионов), которая в свою очередь изоморфна специальной унитарной группе $SU(2)$, называемой также спиновой группой порядка 3, см. ниже диаграмму:

$$\begin{array}{l} S^3 \cong SU(2) = \mathrm{Spin}\,3 \\ \quad \Big\downarrow{\scriptstyle 2} \\ SO(3) \cong \mathbb{R}P^3 \end{array}$$

Метрику на $SO(3)$ можно, в частности, перенести с $S^3$ при двулистном накрытии. Метрика эта инвариантна относительно вращений, значит, есть и мера, по которой можно провести усреднение.

После усреднения получим решение, инвариантное относительно вращений. Иными словами, значение решения $u(x)$ зависит лишь от расстояния точки $x$ от начала координат. Для таких функций оператор $\Delta$ превращается в обыкновенный линейный дифференциальный оператор второго порядка. Поэтому уравнение для $u$ имеет при $r > 0$ вид: $u'' + A(r)u' + B(r)u = 0$ (здесь в правой части 0, поскольку при $r > 0$ $\delta$-функция обращается в 0).

Коэффициенты $A, B$ можно вычислить явно, не поленившись перейти в операторе Лапласа к полярным координатам, но можно обойтись и без вычислений. Во-первых, мы знаем очевидное решение $u \equiv 1$. Поэтому $B \equiv 0$. Значит, оператор имеет вид $u'' + A(r)u'$.

Теперь применим соображения однородности. Оператор Лапласа переводит однородные функции в однородные, причем степень понижается на 2. Так как функция $\delta(x)$ однородная степени $-n$, то однородное решение $u$ уравнения $\Delta u = \delta$ должно быть однородным степени $2 - n$. Следовательно, такое решение пропорционально $\frac{1}{r^{n-2}}$, в частности, при $n = 3$ оно пропорционально $1/r$. (Заметим, что при $n = 2$ эта формула не работает — однородного непостоянного решения в этом случае не существует.)

Вычислим оператор Лапласа: $\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = \operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)$.

Градиент нашей однородной функции есть векторное поле, направленное к центру по радиусам, его длина равна модулю производной по $r$:

$$(r^{2-n})' = (2-n)r^{1-n} = \frac{2-n}{r^{n-1}}.$$

(Для проверки: при $n = 3$ градиент потенциала $1/r$ есть ньютонова сила, обратно пропорциональная $r^2$.)

Для вычисления дивергенции заметим, что она инвариантна относительно вращений. Вычислим поток найденного градиентного поля через две концентрические сферы, рис. 9.4.

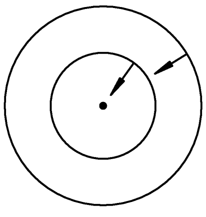

Рис. 9.4. Вычисление $\operatorname{div}\operatorname{grad} r^{2-n}$

Поток через сферу равен величине поля, умноженной на поверхность сферы, поверхность сферы радиуса $R$ равна $\omega_{n-1}R^{n-1}$, где $\omega_{n-1}$ — поверхность сферы единичного радиуса ($4\pi$ при $n = 3$, $2\pi$ при $n = 2$). В итоге поток равен $(2-n)\omega_{n-1}$, в частности, при $n = 3$ это $-4\pi$.

Наше поле, таким образом, обладает замечательным свойством «несжимаемости»: его поток через любую сферу с центром в 0 одинаков. Этим условием сферически симметричное поле определяется однозначно (с точностью до умножения на постоянную). Например, в трехмерном пространстве таким свойством несжимаемости обладает только Ньютоново поле. На плоскости тоже существует $O(2)$-инвариантное несжимаемое поле: длина вектора поля обратно пропорциональна первой степени расстояния до центра. Это поле градиентное, но его потенциал — не однородная функция, а $\ln\frac{1}{r}$. Мы приходим к удивительной формуле $\frac{1}{r^0} \sim \ln\frac{1}{r}$.

**Замечание.** Эту формулу, а с ней и фундаментальное решение уравнения $\Delta u = \delta$ на плоскости, можно было бы угадать, рассматривая размерность плоскости $n = 2$ как предел размерностей $n = 2 + \varepsilon$:

$$\frac{1}{r^{n-2}} = \frac{1}{r^{\varepsilon}} = \exp\left(\varepsilon \ln\frac{1}{r}\right) = 1 + \varepsilon\ln\frac{1}{r} + O(\varepsilon^2).$$

Вернемся к вычислению дивергенции. Суммарный поток поля через границу слоя между концентрическими сферами нулевой. Но этот поток есть интеграл от дивергенции по слою. Итак,

$$\int_{r_1}^{r_2} r^{n-1} \operatorname{div}\operatorname{grad}(r^{2-n})\,dr = 0$$

при любых $r_1, r_2$, значит и сама дивергенция равна 0. Окончательно,

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = \operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = 0$$

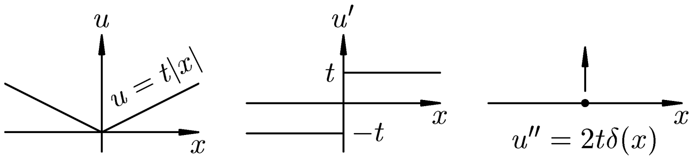


Рис. 9.5. Фундаментальное решение оператора Лапласа при $n = 1$

при $r > 0$. А тогда можно найти и коэффициент $A(r)$ — вот мы и избежали длинной замены переменных.

**Утверждение.** *Во всем пространстве* $\Delta\left(\dfrac{1}{r^{n-2}}\right) \neq 0$.

Действительно, рассмотрим поток поля градиента через сферу с центром 0, он равен $(2-n)\omega_{n-1}$. Более того, сферу можно заменить границей произвольной области. Если эта область содержит 0, то интеграл по этой области от дивергенции поля равен $(2-n)\omega_{n-1}$, а если не содержит, то интеграл равен нулю. Но это означает по самому определению $\delta$-функции, что дивергенция поля равна

$$(2-n)\omega_{n-1}\delta(x).$$

Например, при $n = 3$ имеем $\Delta\left(\dfrac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(x)$ и т. д.

Конечно, этот результат можно проверить и при помощи $\delta$-образных функций. Но мы видим, насколько все становится проще, если работать прямо с идеальным предельным объектом — с самой $\delta$-функцией.

При $n = 2$ в качестве фундаментального решения (потенциала) подходит функция $\ln(1/r)$. Действительно, производная по $r$ от нее равна $-1/r$, а дальше проходят все наши рассуждения.

Заметим, что на уровне полей результат общий во всех размерностях: поле обратно пропорционально $r^{n-1}$. Случай $n = 1$ тоже включается в общую картину: фундаментальным решением оператора $\dfrac{d^2}{dx^2}$ является функция $|tx|$ с подходящим $t$, поле по абсолютной величине пропорционально $\dfrac{1}{r^{1-1}}$, т. е. постоянно, рис. 9.5.

Мы видим, что $t = 1/2$, так что фундаментальное решение есть $|x|/2$. Интересно, что случай $n = 1$ укладывается в общую картину и на уровне коэффициентов. А именно, общая формула для фундаментального решения:

$$u_0 = \frac{1}{(2-n)\omega_{n-1}r^{n-2}}$$

при $n = 1$ превращается в $\dfrac{r}{\omega_0} = \dfrac{r}{2}$. Действительно, поверхность $\omega_0$ (нульмерный объем) нульмерной сферы $S^0$, состоящей из двух точек, равна 2.

Итак, общая формула для фундаментального решения верна во всех размерностях, кроме 2, где возникает логарифм: $u_0 = -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}$.

**Замечание.** Появление здесь логарифма имеет свои глубокие причины: логарифм относится к так называемым присоединенным однородным функциям. Логарифм присоединяется к степенным функциям совершенно таким же образом, как присоединенные векторы присоединяются к собственным в теории жордановых клеток. Вы уже сталкивались с этим явлением в теории резонансов при решении линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами: когда собственные числа становятся кратными, к экспонентам присоединяются квазимногочлены.

Физический смысл фундаментального решения — потенциал единичного точечного заряда в точке 0. Градиент этого потенциала есть поле, созданное этим зарядом.

Физически интересно рассматривать поля при $n = 3$. Но и поля в меньших размерностях можно получить из трехмерных картин, обладающих подходящей симметрией.

Рассмотрим, например, равномерно заряженную прямую в $\mathbb{R}^3$. Найдем силу, созданную этим зарядом в данной точке как равнодействующую сил точечных зарядов, размазанных по прямой. Результат будет такой же, как при рассмотрении плоскости, проходящей через нашу точку перпендикулярно заряженной прямой, причем весь заряд прямой надо поместить в 0, рис. 9.6.

П р е д о с т е р е ж е н и е: складывать нужно именно силы, а не потенциалы, так как соответствующий интеграл для потенциалов расходится. Мы получаем еще одну замечательную и удивительную формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} \sim 2\ln\frac{1}{r} + \mathrm{const}$$

(чему равна константа, спрашивать запрещается!).

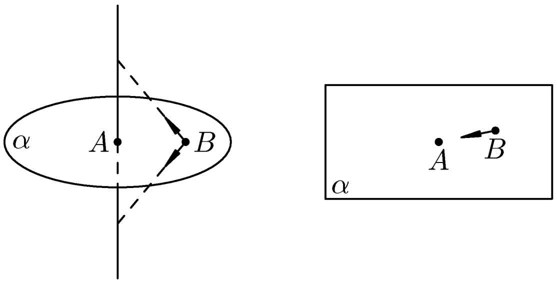


Рис. 9.6. Прямая создает в каждой ортогональной плоскости такое же поле зарядов, какое точечный заряд создает на плоскости

Аналогично, если заряд равномерно распределен на плоскости, то на каждой ортогональной прямой получим такую же картину сил, какую создает точечный заряд при $n = 1$.

Аналогичный спуск можно проводить, начиная с любой размерности.

Теперь рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$, заданную в ограниченной области $\Omega$. Решение $u$ уравнения Пуассона $\Delta u = f$ можно найти по принципу суперпозиции, представляя $f$ в виде суперпозиции сдвигов $\delta$-функции. Пусть $u_0$ — фундаментальное решение, т. е. $\Delta u_0(x) = \delta(x)$. Иными словами, $u_0(x)$ — потенциал, созданный в точке $x$ единичным зарядом, помещенным в нуле. Если заряд величины $f(y)$ находится в точке $y$, то в точке $x$ он создаст потенциал $f(y)u_0(x-y)$.

Суперпозиция всех этих полей — поле с потенциалом, заданным формулой

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y)u_0(x-y)\,dy.$$

Эта функция называется *интегралом Пуассона.* По принципу суперпозиции

$$\Delta u(x) = \int_{\Omega} f(y)\delta(x-y)\,dy = f(x).$$

Поэтому $u(x)$ — решение уравнения Пуассона.

**Теорема.** *Пусть непрерывная функция $f(x)$ сосредоточена в ограниченной области $\Omega$. Тогда существует решение уравнения Пуассона $\Delta u = f$, которое дается формулой:*

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y)u_0(x-y)\,dy,$$

*где $u_0$ — фундаментальное решение оператора Лапласа.*

Когда явная формула для решения написана, выполнение уравнения можно проверить непосредственно, не прибегая к $\delta$-функциям.

**Упражнение.** Докажите теорему непосредственно.

Решение не единственно, к нему можно добавить любую гармоническую функцию. Единственное решение можно выделить, наложив условие на бесконечности.

При $n > 2$ фундаментальное решение на бесконечности обращается в 0, а значит обращается в 0 и весь интеграл Пуассона. Этим условием решение выделяется однозначно. Действительно, разность двух таких решений была бы гармонической функцией, обращающейся в нуль на бесконечности. По принципу макимума она тождественно равна нулю.

При $n = 2$ единственное с точностью до аддитивной постоянной решение выделяется условием $|u(x)| \leqslant C \ln |x|$.

Теперь рассмотрим заряды, сосредоточенные только на границе $\partial\Omega$ области $\Omega$. Обозначим поверхностную плотность зарядов в точке $y$ границы через $f(y)$. Положим

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} f(y) u_0(x - y)\, dy.$$

Эта функция гармонична всюду вне границы области $\Omega$ и обращается в 0 на бесконечности (при $n = 2$ $|u|$ на бесконечности растет не быстрее логарифма).

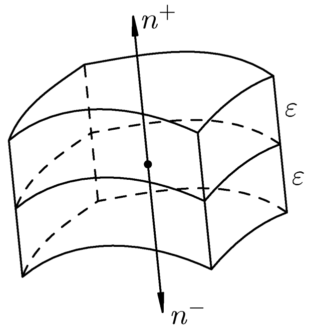


Рис. 9.7. Поле, созданное простым слоем

Что происходит в точках самой границы? Рассмотрим элемент $dS$ границы. Построим вдоль нормали цилиндр над $dS$ с малой высотой $\varepsilon$, рис. 9.7.

Рассмотрим поток градиента функции $u$ через границу построенной области $G$. Естественно ожидать, что поток через боковую поверхность мал вместе с $\varepsilon$, так как эта боковая поверхность имеет малую площадь (оставим это пока без доказательства). Вычислим

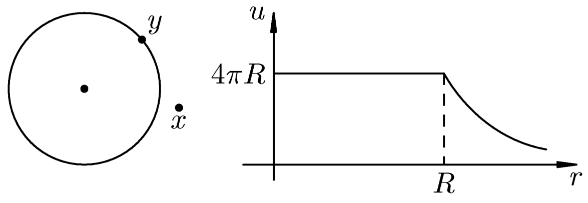


Рис. 9.8. Потенциал равномерно заряженной сферы

сначала суммарный поток:

$$\int\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int\limits_{\partial G} (n, \nabla u)\, d\sigma = \int\limits_{G} \Delta u\, dx = \int\limits_{(\partial\Omega)\cap G} f\, dS$$

(второе равенство — на основании формулы Стокса, третье учитывает заряды, попавшие в $G$). С другой стороны, поток через основания равен $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n_+} + \dfrac{\partial u}{\partial n_-}\right) dS$ с точностью до малой по сравнению с $dS$ поправки. Пренебрегая малым при малых $\varepsilon$ потоком через боковую поверхность, мы приходим к выводу, что в каждой точке $\partial\Omega$ имеет место равенство: $\dfrac{\partial u}{\partial n_+} + \dfrac{\partial u}{\partial n_-} = f$.

Сумма в левой части — с к а ч о к нормальной производной, если считать, что нормаль ориентирована в одну сторону. Итак, *функция $u(x)$ гармоническая внутри и вне поверхности, скачок ее нормальной производной равен плотности распределенного по поверхности заряда.* Эта функция называется *потенциалом простого слоя* — заряды распределены по поверхности в один слой.

**Пример 1.** Вычислим потенциал сферы с постоянной плотностью заряда. С точностью до множителя получим $u(x) = \int\limits_{|y|=R} \dfrac{dy}{|x-y|}$, рис. 9.8. Взять этот интеграл явным интегрированием на сфере можно, но не очень просто (Ньютон с этим справился).

Но можно найти ответ и без интегрирования, используя симметрию сферы. Мы заранее знаем, что $u = u(r)$ — функция гармоническая внутри и вне сферы. Значит можно искать решение в виде $a + b/r$ (константы могут быть разными внутри и вне области). Внутри сферы $b = 0$, иначе нарушится гармоничность в нуле. Значит, внутри сферы $u$ постоянна и, в частности, равна своему значению в центре — $4\pi R$. Силовое поле внутри шара равно 0.

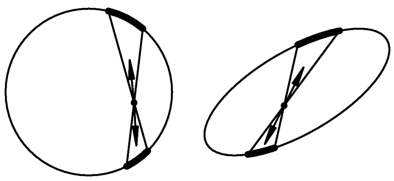

Рис. 9.9. Тяготение внутри сферы и эллипсоида отсутствует

Кстати, Ньютон обнаружил это путем уравновешивания сил, рис. 9.9, его рассуждение верно также для эллипсоида, точнее, для бесконечно тонкого однородного слоя между гомотетичными эллипсоидами с общим центром, где соображения симметрии (зависимость потенциала только от радиуса) не проходят.

**Задача.** Докажите, что силы притяжения противоположными элементами слоя между концентрическими гомотетичными эллипсоидами противоположны.

Вернемся к нашей сфере и найдем константы $a$ и $b$ для внешней области. Снаружи $a = 0$ (потенциал на бесконечности нулевой). Коэффициент $b$ представляет собой суммарный заряд и равен $4\pi R$. Можно также найти $a$ из соображений непрерывности функции $u$ в точках самой сферы при подходе изнутри и снаружи, поскольку интеграл равномерно сходится. График потенциала дан на рис. 9.8.

**Пример 2.** Пусть $A$ — симметрический оператор в евклидовом пространстве, $I$ — тождественный. Оператор $A - \lambda I$ определяет однопараметрическое семейство квадратичных форм $((A - \lambda I)x, x)$, называемое евклидовым пучком. Оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ (резольвента) — тоже симметрический и определяет нелинейный пучок квадратичных форм $((A - \lambda I)^{-1}x, x)$ (двойственный евклидову в смысле проективной двойственности). Рассмотрим семейство квадрик $((A - \lambda I)^{-1}x, x) = 1$. Например, при $n = 2$ пучок имеет вид, как на рис. 9.10, все кривые здесь имеют одни и те же фокусы.

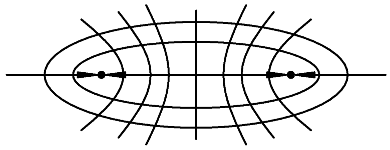

Рис. 9.10. Кривые пучка при $n = 2$

Уравнения квадрик пучка можно записать в собственном базисе оператора $A$ в виде

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n - \lambda} = 1,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — собственные числа оператора $A$. Квадрики, соответствующие различным значениям $\lambda$, называются *конфокальными* друг другу.

**Задача.** Докажите, что через каждую точку $n$-мерного пространства проходят ровно $n$ конфокальных друг другу квадрик пучка (соответствующих некоторым значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$). Эти квадрики в каждой точке их пересечения попарно ортогональны.

Значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ называются *эллиптическими координатами* точки.

При $n = 3$ через каждую точку пространства проходит эллипсоид, однополостный гиперболоид и двуполостный гиперболоид, рис. 9.11.

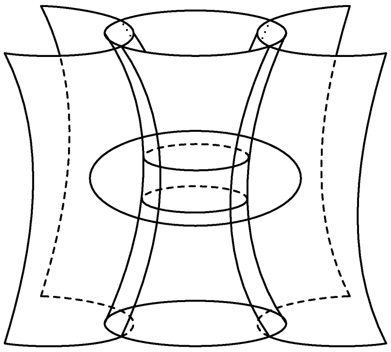

Рис. 9.11. Поверхности пучка при $n = 3$

**Задача.** Рассмотрим какой-нибудь эллипсоид и бесконечно близкий концентрический гомотетичный эллипсоид. Рассмотрим потенциал, созданный равномерным распределением зарядов в слое между этими двумя эллипсоидами. Такой потенциал задается плотностью $\dfrac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{df}$, т. е. $\dfrac{ds}{|\nabla f|}$, где $ds$ — евклидова площадь, а $f$ — квадратичная форма, задающая эллипсоид. Она называется *гомеоидной* плотностью. Тогда:

1. Электростатистическое поле внутри эллипсоида равно нулю.

2. Снаружи силовые линии (фазовые линии векторного поля градиента потенциала) являются координатными линиями вышеописанных эллиптических координат.

3. Все поверхности уровня потенциала во внешней области являются эллипсоидами, конфокальными друг другу.

Напомню некоторые простые положения электростатики.

*Потенциал установившегося распределения зарядов проводящей поверхности постоянен на ней.* Действительно, если потенциал был бы не постоянен, то градиент потенциала (т. е. электростатическое поле) имел бы направленную вдоль поверхности компоненту, которая заставила бы заряды двигаться.

Определенное выше гомеоидное распределение — это распределение заряда на поверхности проводящего («металлического») заряженного эллипсоида.

Интересно, что плотность распределения заряда на проводящей поверхности больше там, где больше кривизна поверхности. Внутри же проводника не может быть зарядов установившегося распределения. Действительно, градиент потенциала установившегося распределения зарядов равен нулю внутри проводника (иначе заряды начали бы двигаться). Значит, потенциал внутри проводника — константа и, следовательно, плотность зарядов там нулевая.

Точно так же потенциал гладкой проводящей поверхности, ограничивающей некоторую ограниченную область, постоянен в этой области, если нет зарядов.

Действительно, потенциал — гармонический внутри поверхности и постоянный на поверхности. Следовательно, по принципу максимума он постоянен и внутри области.

Попросту говоря, электростатическое поле не может проникнуть вовнутрь металлической полости («экранирование»). Аналогичные факты верны и в $\mathbb{R}^n$ при любом $n$.

**Задача 1.** В точку на расстоянии $r$ от центра незаряженной проводящей окружности радиуса $R$ в $\mathbb{R}^2$ помещен единичный заряд. Найти образовавшееся электростатическое поле, его эквипотенциальные кривые и силовые линии.

Указание. Начните со случая $r = 0$.

**Задача 2.** Проведите вычисления плотности равновесного распределения зарядов для «заряженного» проводящего эллипса или квадрата в двумерной задаче; какова особенность распределения заряда у вершин?

## Добавление. Оценка потенциала простого слоя

Докажем, что электростатическое поле, созданное гладким распределением зарядов простого слоя на гладкой ограниченной поверхности, ограничено вплоть до границы.

Отсюда, в частности, следует, что поток через боковую поверхность цилиндра малой высоты $\varepsilon$ (в построениях на с. 101) мал вместе с $\varepsilon$, чем мы пользовались при доказательстве формулы скачка нормальной производной потенциала простого слоя.

Рассмотрим семейство нормалей к поверхности слоя. Достаточно малая окрестность этой поверхности расслоена на отрезки нормалей. Достаточно доказать, что сила равномерно ограничена внутри такой $r$-окрестности (так как вне ее сила ограничена величиной $\rho S/r^2$, где $\rho$ — максимальная плотность заряда, а $S$ — площадь поверхности). Рассмотрим отрезок нормали, проведенный через точку $P$ на поверхности. Введем в окрестности точки $P$ декартовы координаты с началом в $P$: $z$ по нормали к поверхности, $\vec{x}$ в касательной плоскости. Если радиус $r$ окрестности точки $P$ достаточно мал, то уравнение поверхности слоя в наших координатах записывается в виде: $z = h(\vec{x}),\ \ |h(\vec{x})| \leqslant C|\vec{x}|^2$.

Для доказательства ограниченности силы достаточно равномерно оценить только силу, созданную зарядами, находящимися в построенном шаре радиуса $r$ (сила, созданная остальными зарядами, скажем, в $r/2$-окрестности точки $P$ не превосходит $4\rho S/r^2$).

Настоящую трудность вызывает оценка силы, созданной вблизи точки $P$ зарядами из окрестности. Здесь ограниченность получается лишь за счет того, что противоположные части окрестности тянут в разные стороны.

Рассмотрим вначале частный случай, когда слой в нашем шаре — горизонтальная плоскость ($z = 0$) и плотность распределения зарядов постоянна.

В этом случае горизонтальные составляющие сил, созданных на оси $z$ зарядами в противоположных точках $\vec{x}$, точно уравновешивают друг друга. Результирующая сила вертикальна и дается в точке $Z$ интегралом (при плотности зарядов — единица):

$$F = \int_0^r \frac{Z 2\pi x\, dx}{(x^2+Z^2)^{3/2}} = 2\pi \int_0^{r/Z} \frac{\xi\, d\xi}{(\xi^2+1)^{3/2}} = 2\pi \left(1 - \frac{Z}{\sqrt{r^2+Z^2}}\right)$$

(для простоты $Z$ считается положительным, при изменении знака $Z$ сила меняет знак), где $x = |\vec{x}|$.

Во всяком случае сила ограничена величиной $2\pi$ (соответствующей, как мы уже знаем, полю равномерно заряженной плоскости).

Теперь заменим распределение зарядов вдоль поверхности $z = h(\vec{x})$ с плотностью $\rho(\vec{x})$ в области $x < r$ распределением постоянной плотности $\rho(0)$ в круге $x < r$ на плоскости $Z = 0$ (здесь $Z$ — координата точки оси $z$, где мы хотим оценить величину поля).

Вертикальная составляющая силы в точке $Z$ дается теперь интегралом от:

$$\frac{(Z+h(\vec{x}))\,\rho(\vec{x})J(\vec{x})x\,dx\,d\varphi}{\left(x^2+(Z+h)^2\right)^{3/2}},$$

где $\rho$ — плотность, $J$ — якобиан, равный отношению элемента площади слоя над $\vec{x}$ к элементу $x\,dx\,d\varphi$ площади на плоскости $\vec{x}$ (с полярными координатами $x,\varphi$).

Величины $\rho$ и $J$ в нашей области ограничены. Кроме того, выражение в знаменателе:

$$x^2+(Z+h)^2=x^2+Z^2+2Zh(\vec{x})+h^2(\vec{x})\geqslant\frac{1}{2}(x^2+Z^2)$$

при достаточно малых $r$, так как $|Zh|\leqslant\dfrac{Z^2}{4}+h^2$ и $|h|\leqslant Cx^2$.

Поэтому все пропорциональное $Z$ слагаемое в интеграле оценивается сверху константой так же, как в случае однородной плоскости.

Второе (пропорциональное $h$) слагаемое под интегралом ограничено (числитель меньше $C_1x^3$, а знаменатель больше $C_2x^3$). Поэтому вся вертикальная составляющая ограничена. Горизонтальная составляющая, т. е. интеграл от $\dfrac{\vec{x}\rho(\vec{x})J(\vec{x})x\,dx\,d\varphi}{\left(x^2+(Z+h(\vec{x}))^2\right)^{3/2}}$, оценивается сложнее.

Прежде всего можно сразу считать, что $\rho J\equiv 1$. Действительно, функции $\rho$ и $J$ гладкие, поэтому замена $\rho(\vec{x})J(\vec{x})$ на $\rho(0)J(0)$ меняет подынтегральное выражение на ограниченное слагаемое ($\leqslant C_3x^3$ в числителе, $\geqslant C_2x^3$ в знаменателе).

Остается сравнить интеграл при $\rho J=1$ с таким же интегралом с $h=0$ (равным, как мы уже знаем, нулю).

**Лемма.**

$$\left|\frac{1}{(x^2+Z^2)^{3/2}}-\frac{1}{(x^2+(Z+h)^2)^{3/2}}\right|\leqslant\frac{C_4}{x^2}.$$

Доказательство. Пусть $Z=\lambda x$, тогда левая часть равна

$$\frac{1}{x^3}\left|\frac{1}{(1+\lambda^2)^{3/2}}-\frac{1}{(1+(\lambda+\mu)^2)^{3/2}}\right|,$$

где $h=\mu x$, так что $|\mu|<Cx$.

Функция $\dfrac{1}{(1+\lambda^2)^{3/2}}$ имеет ограниченную некоторой константой $C_5$ на всей прямой производную. По формуле конечных приращений

$$\left|\frac{1}{(1+\lambda^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+(\lambda+\mu)^2)^{3/2}}\right| \leqslant C_5\mu.$$

Поскольку $|\mu| \leqslant Cx$, оцениваемая в лемме величина не превосходит окончательно

$$\left|\frac{C_5\mu}{x^3}\right| \leqslant \frac{C_5C}{x^2},$$

что и требовалось доказать.

Наконец, для интеграла, дающего горизонтальную составляющую силы при $J\rho = 1$, мы получаем оценку

$$\left|\int\limits_0^r\int\limits_0^{2\pi}\frac{\vec{x}\,x\,dx\,d\varphi}{(x^2+(Z+h(\vec{x}))^2)^{3/2}}\right| \leqslant 2\pi\int\limits_0^r\frac{x^2C_4}{x^2}dx = 2\pi rC_4$$

(такой же интеграл с $h = 0$ равен нулю, а разность подынтегральных выражений при $h = 0$ и при любом $h$ оценена величиной $C_4/x^2$ в лемме).

**Замечание 3.** Подобными же элементарными оценками можно доказать и непрерывность потенциала простого слоя во всем пространстве, и существование и непрерывность пределов его производных по внутренней и внешней нормалям, а не только формулу скачка нормальной производной, которой мы тут ограничились.

**Замечание 4.** При рассмотрении потенциалов очень полезно введенное Фарадеем соглашение, что «из каждой единицы заряда выходят $4\pi$ силовых линий электростатического поля» (что бы это ни означало). Предполагается, что линии начинаются в положительных зарядах (или на бесконечности), а кончаются в отрицательных (или на бесконечности).

В этом случае напряженность поля оказывается равной «плотности силовых линий». Например, для зарядов простого слоя половина из $\rho\,4\pi\,dS$ силовых линий, выходящих из зарядов области $dS$, идут в одну, а половина — в другую сторону, откуда и получается формула скачка. Множитель $4\pi$ появляется тут из-за того, что в физике речь идет о потенциале единичного заряда вида $u = 1/r$, а мы определяли потенциал простого слоя как интеграл от сдвигов фундаментального решения $\Delta u = \delta$.