Приложение А.

Топологическое содержание теоремы Максвелла о мультипольном представлении сферических функций

Здесь приведено доказательство теоремы Максвелла о мультипольном представлении сферических функций. В частности, доказывается, что функции, допускающие такое представление, образуют линейное пространство. Именно это утверждение осталось недоказаннным выше (лекция 11, с. 133).

Одновременно мы докажем ряд интересных топологических и алгебраических следствий теоремы Максвелла (впервые доказанной, повидимому, Сильвестром в малоизвестной заметке, содержащей также как основной идеологический принцип трактата Бурбаки, так и предостережение об опасности злоупотребления формализацией математики).

Вспомним утвержение теоремы (см. с. 119 и 129):

Теорема 1. *Ограничение на сферу n-кратной производной функ-*

ции $1/r$ вдоль n постоянных (инвариантных относительно сдвигов) векторных полей на $\mathbb{R}^3$ совпадает с некоторой сферической функцией степени n. Любая ненулевая сферическая функция степени n может быть получена таким образом при помощи некоторого набора из n ненулевых векторных полей. По заданной функции эти поля определяются однозначно (с точностью до умножения на ненулевую константу и перестановки полей).

Сферические функции степени n образуют линейное пространство размерности $2n+1$.

Множество функций, представимых мультипольной конструкцией, описанной в теореме, априори представляется существенно нелинейным. Из теоремы вытекает, что образом соответствующего полилинейного отображения является *линейное* пространство. Утверждение единственности в теореме можно переформулировать в чисто топологических терминах.

Теорема 2. *Конфигурационное пространство n (быть может совпадающих) неразличимых точек на вещественной проективной плоскости (т. е. n-я симметрическая степень $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$) диффеоморфно вещественному проективному пространству размерности $2n$:*

$$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}P^n) \approx \mathbb{R}P^{2n}.$$

Симметрические степени неориентируемых поверхностей были (независимо от Максвелла) вычислены Ж. Дюпоном и Г. Люстигом [4].

Замечание. Теорема 2 родственна проективной теореме Виета

$$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) \approx \mathbb{C}P^n$$

и является, в некотором смысле, ее кватернионной версией.

Рассматривая сферу Римана $\mathbb{C}P^1$ как двулистное накрытие вещественного проективного пространства, получаем, в качестве следствия, алгебраическое отображение $r\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}P^{2n}$ кратности 2^n, обобщающее на бо́льшие размерности классическую теорему

$$\mathbb{C}P^2/\mathrm{conj} \approx S^4.$$

1. Основные пространства и группы

Рассмотрим n-мерное арифметическое кватернионное пространство $\mathbb{H}^n = \bigoplus \mathbb{H}^1_p$ с его обычной i-комплексной структурой $(i(ae+bi+cj+dk) = ai - be + ck - dj)$. Умножение слева на j действует на $\mathbb{H}^1_p$, сохраняя комплексные прямые. Оно отправляет каждую прямую в эрмитово-ортогональную к ней прямую и действует на $\mathbb{C}P^1_p = (\mathbb{H}^1_p \setminus 0)/\mathbb{C}^*$ как антиголоморфная инволюция σ_p, не имеющая неподвижных точек.

Рассмотрим группу Кокстера $B(n)$, действующую на произведении $(\mathbb{C}P^1)^n$ перестановками сомножителей и отображениями σ_p на некоторых сомножителях.

Теорема 3. *Пространство орбит действия $B(n)$ на $(\mathbb{C}P^1)^n$ является $2n$-мерным вещественным проективным пространством:*

$$(\mathbb{C}P^1)^n/B(n) \approx \mathbb{R}P^{2n}.$$

Пространство орбит группы перестановок $S(n)$ является, согласно теореме Виета, комплексным проективным пространством:

$$(\mathbb{C}P^1)^n/S(n) = \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^n.$$

Таким образом, мы получили естественное отображение $r\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}P^{2n}$ (отображающее орбиту ξ подгруппы $S(n)$ в орбиту $r(\xi)$ группы $B(n)$, содержащую ξ).

Группа $B(n)$ содержит также интересную подгруппу $\mathbb{Z}_2 \times S(n)$ (перестановок и перестановок, сопровождаемых антиголоморфными инволюциями σ_p на к а ж д о м сомножителе). Произведение инволюций σ_p действует на $(\mathbb{C}P^1)^n/S(n)$ как инволюция $\sigma \in \mathbb{Z}_2$.

Включения групп $S(n) \to \mathbb{Z}_2 \times S(n) \to B(n)$ порождают отображения пространств орбит

$$(\mathbb{C}P^1)^n/S(n) \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{C}P^1)^n/(S(n)\times\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta} (\mathbb{C}P^1)^n/B(n)$$

кратности, соответственно, 2 и 2^{n-1}.

Инволюция $\sigma\colon (\mathbb{C}P^1)^n/S(n) \to (\mathbb{C}P^1)^n/S(n)$ переставляет прообразы $\alpha^{-1}(\cdot)$.

Теорема 4. *При четных n инволюция σ действует на $(\mathbb{C}P^1)^n/S(n) \approx \mathbb{C}P^n$ как комплексное сопряжение* conj.

Таким образом, для четных n получаем вещественные алгебраические отображения

$$\mathbb{C}P^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}P^n/\mathrm{conj} \xrightarrow{\beta} \mathbb{R}P^{2n}$$

кратности, соответственно, 2 и 2^{n-1}.

Замечание. При $n = 2$ второе пространство является гладким (см., например, [1] и [2]; вероятно это было известно даже до публикации [2]),

$$\mathbb{C}P^2/\mathrm{conj} \approx S^4.$$

В этом случае кратность β равна 2.

Инволюция, переставляющая два прообраза, действует на S^4 как антиподальная инволюция.

Я благодарен С. Дональдсону за это замечание, показывающее, что (странная) теорема Максвелла в некотором смысле является многомерным обобщением (не менее странной) теоремы $\mathbb{C}P^2/\mathrm{conj} \approx S^4$.

Ниже мы покажем, что теорема Максвелла доставляет явную формулу для диффеоморфизма $\mathbb{C}P^2/\mathrm{conj} \to S^4$.

Замечание. В большинстве случаев, утверждая, что два многообразия «совпадают», мы будем явно указывать только вещественный алгебраический гомеоморфизм между этими многообразиями. Педантичная проверка того, что эти гомеоморфизмы могут быть сглажены, в некоторых случаях оставляется читателю (см., однако, п. 4).

2. Некоторые теоремы вещественной алгебраической геометрии

Рассмотрим вещественный однородный многочлен f степени n от трех переменных (x, y, z). Теорема Максвелла имеет следующее странное алгебраическое следствие.

Теорема 5. *Любой вещественный однородный многочлен f степени n единственным образом можно представить в виде суммы двух таких многочленов, один из которых есть произведение n линейных вещественных сомножителей, а другой делится на $x^2 + y^2 + z^2$.*

В частности, любая вещественная алгебраическая кривая степени n в метрической проективной плоскости определяет n вещественных «главных осей», инвариантно связанных с кривой.

Доказательство. Вещественное уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ задает в $\mathbb{C}P^2$ вещественную кривую S, не имеющую вещественных точек. Эта кривая, называемая мнимой окружностью, рациональна и топологически является сферой. Комплексное сопряжение отправляет S в себя и действует на ней как антиголоморфная инволюция, не имеющая неподвижных точек (это — обычная антиподальная инволюция S^2).

Уравнение $f = 0$ задает в $\mathbb{C}P^2$ вещественную алгебраическую кривую K степени n. Комплексное сопряжение $\mathrm{conj}\colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ отображает K в себя и переставляет $2n$ точек пересечения K с S.

Каждая пара сопряженных точек пересечения задает прямую, их соединяющую (точки отличны друг от друга, поскольку conj не имеет неподвижных точек на S^2). Эта прямая вещественна (поскольку conj переставляет две принадлежащие ей точки) и может быть задана некоторым уравнением $ax + by + cz = 0$ с вещественными коэффициентами.

Рассмотрим произведение g полученных таким образом n вещественных линейных функций. Мы докажем, что f пропорционально g вдоль S.

Однородный многочлен f равен нулю в $2n$ общих точках кривых K и S. Кривая S рациональна. Выберем некоторый рациональный параметр t (например, $x = 2t$, $y = t^2 - 1$, $z = i(t^2 + 1)$). Выбирая подходящим образом координаты, мы можем исключить случай, когда $t = \infty$ является одной из точек пересечения S с K. Многочлены $f(x(t), y(t), z(t))$ и $g(x(t), y(t), z(t))$ степени $2n$ имеют $2n$ общих корней, причем $g \neq 0$. Следовательно, вдоль S выполняется равенство $f = cg$, $c = \mathrm{const}$.

Таким образом, однородный многочлен $f - cg$ на S равен нулю, т. е. он имеет вид $(x^2+y^2+z^2)h(x,y,z)$, где h есть вещественный однородный многочлен степени $n - 2$. Теорема доказана.

Замечание. Единственность разложения $f = cg + (x^2 + y^2 + z^2)h$ можно доказать независимо от доказательства существования. Предположим, что имеется второе разложение $f = c'g' + (x^2 + y^2 + z^2)h'$. Тогда $c'g' - cg = (x^2 + y^2 + z^2)h''$, где g и g' являются произведениями n линейных сомножителей. Пусть $g = 0$ на прямой l. На этой прямой многочлен $c'g'$ имеет n вещественных корней и равен правой части предыдущей формулы, имеющей не более $n - 2$ вещественных корней. Таким образом, $c'g' \equiv 0$, $h'' = 0$ на l. Следовательно, мы можем разделить все три многочлена на уравнение l и доказать единственность индукцией по n. (При $n = 1$ все очевидно, так как $cg = c'g'$, поскольку $h'' = 0$.)

Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{R}P^N$ вещественных алгебраических кривых степени n $(N = n(n+3)/2)$.

Вещественные алгебраические кривые, состоящие из n вещественных прямых, образуют в этом проективном пространстве замкнутое вещественное алгебраическое многообразие T размерности $2n$ (образ $(\mathbb{R}P^2)^n$ при полилинейном отображении). Кривые, содержащие S, образуют проективное подпространство $P = \mathbb{R}P^M$, $M = (n-2)(n+1)/2$. В этих терминах теорема 5 принимает следующий вид.

Теорема 6. *Многообразия T и P в $\mathbb{R}P^N$ зацеплены с коэффициентом зацепления 1 таким образом, что через любую точку из $\mathbb{R}P^N$, не принадлежащую объединению T с P, проходит единственная вещественная проективная прямая, связывающая T с P. Эта прямая пересекает T (так же, как и P) в одной точке.*

Теперь легко доказать теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим пространство H размерности $M+1$, содержащее M-мерное проективное пространство P. *Любое такое пространство пересекает T.* Действительно, выберем точку O на H, не принадлежащую ни P, ни T. Прямая, соединяющая O с T и с P, принадлежит H и пересекает T.

Точка пересечения единственна. В противном случае на точке H была бы точка O, через которую проходили бы две прямые, соединяющие T с P.

Таким образом, мы построили гомеоморфизм между $T \approx \approx \mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$ и многообразием пространств H размерности $M+1$, содержащих P. Последнее многообразие — это $\mathbb{R}P^{N-M-1}$, что (по крайней мере на топологическом уровне) доказывает теорему 2, поскольку $N - M - 1 = 2n$.

3. От алгебраической геометрии к сферическим функциям

Производные гармонической функции вдоль постоянных векторных полей, очевидно, являются гармоническими функциями. Таким образом, все кратные производные функции $1/r$ являются гармоническими вне 0. Следующие леммы доказаны в лекции 11 (с. 129).

Лемма 1. *n-я производная функции $1/r$ вдоль n постоянных векторных полей имеет вид P/r^{2n+1}, где P — однородный многочлен степени n.*

Лемма 2. *Однородный многочлен P из леммы 1 является гармонической функцией.*

Эта лемма вытекает из классической теоремы об инверсии, которую я здесь напомню. Гармоническая функция P/r^{2n+1} является однородной, степени $-(n+1)$. На единичной сфере она совпадает с P. Из этого следует, что продолжение этой функции с единичной сферы на все пространство в виде однородной функции степени n также является гармонической функцией. Это продолжение есть в точности P.

Для доказательства теоремы об инверсии рассмотрим сферический лапласиан $\tilde{\Delta}$ — оператор Лапласа $\operatorname{div}\operatorname{grad}$ на единичной сфере. Мы продолжим его на однородные функции степени k на $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ таким образом, что любая однородная функция F степени k переводится им в однородную функцию $\tilde{\Delta}F$ этой же степени.

Согласно лекции 11 (с. 121) для любой однородной функции F степени k

$$\tilde{\Delta}F = r^2\Delta F - \Lambda F, \quad \text{где } \Lambda = k^2 + k(m-2).$$

Из этой формулы следует, что

(i) Ограничение гармонической однородной функции степени k на единичную сферу в $\mathbb{R}^m$ является собственной функцией сферического лапласиана, отвечающей собственному значению $-\Lambda$.

(ii) Собственная функция сферического лапласиана, отвечающая собственному значению $-\Lambda$, при продолжении ее со сферы до однородной функции степени k на $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ становится гармонической.

(iii) Для любой степени однородности k в $\mathbb{R}^m$ существует двойственная ей степень $k' = 2-m-k$ такая, что однородная гармоническая функция степени k остается гармонической, если мы ограничим ее на сферу, а затем продолжим как однородную функцию двойственной степени. При $m = 3$ условие двойственности имеет вид $k + k' = -1$.

В частности, P/r^{2n+1} из леммы 1 имеет степень $k = -(1+n)$, $m = 3$, т. е. двойственная степень равна $k' = n$, откуда и следует лемма 2.

Лемма 3. *Любую сферическую функцию степени n на S^2 можно представить в виде $f(X,Y,Z)(1/r)$, где f — однородный многочлен степени n, а $X = \partial/\partial x$, $Y = \partial/\partial y$, $Z = \partial/\partial z$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.*

Доказательство. Пространство гармонических однородных многочленов степени n линейно. В нем содержится подпространство гармонических многочленов, ограничения которых представимы в виде, указанном в лемме 3 (по леммам 1 и 2). Это пространство, очевидно, инвариантно относительно поворотов. Но представление $SO(3)$ в пространстве сферических функций степени n неприводимо (любая функция может быть получена из многочлена Лежандра степени n при помощи поворотов и взятия линейных комбинаций повернутых функций).

Таким образом, подпространство из леммы 3 совпадает со всем пространством сферических функций степени n.

Лемма 4. *Любую сферическую функцию степени n можно представить в виде $f_T(X,Y,Z)(1/r)$, где $f_T = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i X + \beta_i Y + \gamma_i Z)$ есть произведение n вещественных линейных сомножителей.*

Доказательство. Согласно теореме 5, существует разложение $f(x,y,z) = f_T(x,y,z) + g(x,y,z)(x^2 + y^2 + z^2)$. Применяя это разложение к представлению леммы 3, получаем

$$f(X,Y,Z)(1/r) = f_T(X,Y,Z)(1/r) + 0,$$

поскольку $X^2+Y^2+Z^2 = \Delta$, а $\Delta(1/r) = 0$. Таким образом, любая сферическая функция обладает мультипольным представлением теоремы 1.

Лемма 5. *Мультипольное представление единственно (т. е. многочлен f_T однозначно определен сферической функцией).*

Доказательство. Предположим, что f_T и f'_T — такие полностью разложимые многочлены, что

$$f_T(X,Y,Z)(1/r) = f'_T(X,Y,Z)(1/r).$$

Согласно лемме 1 (используемой n раз),

$$\begin{aligned} f_T(X,Y,Z)(1/r) &= (cf_T(x,y,z) + r^2 g)r^{-(2n+1)}, \quad c \neq 0, \\ f'_T(X,Y,Z)(1/r) &= (c' f'_T(x,y,z) + r^2 g')r^{-(2n+1)}, \quad c' \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $f_T(x,y,z) - f'_T(x,y,z) = r^2 h(x,y,z)$. Однако, по теореме 5, это возможно только если $f_T = f'_T$. Теорема 1, таким образом, доказана.

4. Явные формулы

Кватернионное левое умножение на j отправляет вектор $(z,w) = zj + we$ из $\mathbb{C}^2 \approx \mathbb{H}^1$ в $(\bar{w}, -\bar{z})$. Этот вектор эрмитово-ортогонален исходному.

Мы получаем, таким образом, явную формулу $t \mapsto -1/\bar{t}$ для антиголоморфной инволюции $\mathbb{C}P^1$, не имеющей неподвижных точек.

Мы можем использовать пары эрмитово-ортогональных прямых в $\mathbb{C}^2$ для параметризации точек из $\mathbb{R}P^2$. Таким образом мы выведем теорему 3 из теоремы 2. Далее мы выпишем явные формулы для диффеоморфизма

$$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{R}P^{2n}$$

из теоремы 2, используя в качестве координат на $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$ наборы из n пар эрмитово-ортогональных прямых в $\mathbb{C}^2$.

Рассмотрим сначала случай $n = 1$.

Каждой паре (z,w) и $(\bar{w}, -\bar{z})$ эрмитово-ортогональных векторов из $\mathbb{C}^2$ сопоставим квадратичную форму на двойственном пространстве, являющуюся произведением линейных форм, представляемым этими векторами:

$$f = (zx + wy)(\bar{w}x - \bar{z}y) = f_0 x^2 + f_1 xy + f_2 y^2.$$

Здесь (x,y) — координаты на двойственной плоскости $\mathbb{C}^2$. Таким образом, коэффициенты квадратичной формы f имеют вид:

$$f_0 = z\bar{w}, \quad f_1 = w\bar{w} - z\bar{z}, \quad f_2 = -\bar{z}w.$$

Заметим, что коэффициент f_1 вещественнен, в то время как $f_2 = -\bar{f}_0$. Будем рассматривать f_0 и f_1 в качестве координат на пространстве $\mathbb{R}^3$ форм f.

Умножение исходного вектора (z, w) на комплексное число приводит к умножению получающегося вектора на квадрат абсолютной величины этого числа. Таким образом, получаем отображение

$$F\colon \mathbb{C}P^1 \to S^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus 0)/\mathbb{R}^+,$$

переводящее комплексные прямые из $\mathbb{C}^2$ в вещественные лучи из $\mathbb{R}^3$.

Выбранную точку (z, w) на комплексной прямой отображение (f_0, f_1) отправляет во вполне определенную точку луча. Например, выбирая $z = t,\ \ w = 1$, получаем $f_0 = t,\ \ f_1 = 1 - t\bar{t}$.

Если исходная точка на прямой нормирована условием $|z|^2 + |w|^2 = 1$, то ее образ лежит на эллипсоиде $|2f_0|^2 + |f_1|^2 = 1$ (который мы также можем называть сферой, рассматривая в качестве координат $2f_0$ и f_1).

Таким образом, сфера Римана $\mathbb{C}P^1 = S^3/S^1$ диффеоморфизмом $(2f_0, f_1)$ отображается на единичную сферу в $\mathbb{R}^3$ с координатами $2f_0$ и f_1. Рассматривая $t = z/w$ в качестве координаты на $\mathbb{C}P^1$, получаем отображение t-плоскости на единичную сферу в $\mathbb{R}^3$, являющееся, в точности, стереографической проекцией. Формулы, которые мы выписываем ниже, являются в этом смысле многомерными обобщениями стереографической проекции.

Заменяя исходную прямую в $\mathbb{C}P^2$ эрмитово-ортогональной, получаем изменение знака отображения F. Действительно, замена z на $\bar{w}$, а w на $-\bar{z}$, измененяет знак как перед f_0, так и перед f_1. Таким образом, F преобразует инволюцию $j\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ (отображающую каждую прямую в ее эрмитово дополнение) в антиподальную инволюцию сферы S^2 в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Применим теперь аналогичную конструкцию к n-й симметрической степени пространства $\mathbb{R}P^2$. Начнем с n-й симметрической степени $\mathbb{C}P^1$. По определению, точкой этого комплексного многообразия

$$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) \approx \mathbb{C}P^n$$

является (неупорядоченное) множество, состоящее из n прямых в $\mathbb{C}^2$.

Выбирая n ненулевых векторов (z_k, w_k) и перемножая соответствующие линейные формы на двойственной плоскости, получим бинарную

n-форму

$$H(x,y) = \prod_{k=1}^{n} (z_k x + w_k y) = h_0 x^n + \ldots + h_n y^n.$$

Коэффициенты этой формы являются (однородными) координатами на $\mathbb{C}P^n = \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}P^1)$ (задающими гладкую голоморфную структуру на этом пространстве).

Если $w_k \neq 0$, то можно положить $w_k = 1$. Получаем в качестве аффинных координат основные симметрические функции переменных $\{z_k\}$,

$$h_0 = \sigma_n(z), \quad \ldots, \quad h_{n-1} = \sigma_1(z),$$
$$(h_n = 1).$$

Далее будем использовать эти σ_k в качестве *локальных* координат на $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$.

Мы начинаем с n пар эрмитово-ортогональных прямых из $\mathbb{C}^2$. Выберем представителя каждой пары таким образом, что ни одна из выбранных прямых не совпадает ни с одной из невыбранных (в данной точке, а следовательно, и в некоторой ее окрестности, где имеет силу наша система координат). Для выполнения указанного выше условия невырожденности при повторении пары достаточно всегда выбирать одну и ту же прямую.

Обозначим через $(z_k, 1)$ векторы, задающие выбранные прямые $(k = 1, \ldots, n)$. В качестве локальных координат на вещественном многообразии $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$ будем использовать (вещественные и мнимые части) n комплексных чисел

$$\sigma_1(z_1, \ldots, z_n), \quad \ldots, \quad \sigma_n(z_1, \ldots, z_n).$$

Ортогональные прямые задаются векторами $(1, -\bar{z}_k)$. Построим симметризованную $2n$-форму

$$f = \prod_{k=1}^{n} (z_k x + y) \prod_{k=1}^{n} (x - \bar{z}_k y) = f_0 x^{2n} + \ldots + f_{2n} y^{2n}.$$

Ниже мы увидим, что коэффициенты f_k являются многочленами от σ и $\bar{\sigma}$.

Теорема 7. *Отображение* $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$, *отправляющее точку* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *в* $(f_0, \ldots, f_{2n})$, *задает (локально) диффеоморфизм многообразия* $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$ *в пространство* $\mathbb{R}P^{2n}$ *лучей из* $\mathbb{R}^{2n+1}$. *В координатах отображение* F *задается следующими явными формулами:*

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \sigma_n, \\
f_1 &= \sigma_{n-1} - \sigma_n \bar{\sigma}_1, \\
f_2 &= \sigma_{n-2} - \sigma_{n-1}\bar{\sigma}_1 + \sigma_{n-2}\bar{\sigma}_2, \\
&\ldots \\
f_n &= 1 - \sigma_1\bar{\sigma}_1 + \sigma_2\bar{\sigma}_2 - \ldots + (-1)^n \sigma_n \bar{\sigma}_n.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\prod_{k=1}^{n} (z_k x + y) = \sigma_n x^n + \sigma_{n-1} x^{n-1} y + \ldots + y^n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} (x - \bar{z}_k y) = x^n - \bar{\sigma}_1 x^{n-1} y + \bar{\sigma}_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + (-1)^n \bar{\sigma}_n y^n.$$

Перемножая эти два многочлена, получаем (согласно Ф. Аикарди) приведенные выше формулы для коэффициентов произведения.

Мы получаем также, что $f_{2n-k} = (-1)^{n-k} \bar{f}_k$, в частности, средний коэффициент f_n вещественнен.

Остается проверить, что в рассматриваемой области якобиан не равен нулю. Это можно доказать без вычислений. Интересующий нас якобиан имеет порядок $2n+1$. Одним из столбцов является вектор

$$\Phi = (f_0, \bar{f}_0, f_1, \bar{f}_1, \ldots, f_{n-1}, \bar{f}_{n-1}, f_n).$$

Остальными $2n$ столбцами являются его производные

$$(\partial\Phi/\partial\sigma_1, \partial\Phi/\partial\bar{\sigma}_1, \ldots, \partial\Phi/\partial\sigma_n, \partial\Phi/\partial\bar{\sigma}_n).$$

Представим этот неголоморфный якобиан в виде значения в точке $\tau = \bar{\sigma}$ голоморфного якобиана $\mathcal{T}(\sigma, \tau)$, заданного при помощи следующей конструкции.

Рассмотрим произведение

$$\prod_{k=1}^{n} (z_k x + y) \prod_{k=1}^{n} (x - w_k y) = F_0 x^{2n} + \ldots + F_{2n} y^{2n}.$$

Коэффициенты F_k являются многочленами от $\sigma_1(z), \ldots, \sigma_n(z)$ и $\tau_1 = \sigma_1(w), \ldots, \tau_n = \sigma_n(w)$. Обозначим через $\Psi = (F_0, \ldots, F_{2n})$ вектор-функцию от переменных σ и τ, и рассмотрим определитель матрицы

$$(\Psi, \partial\Psi/\partial\sigma_1, \partial\Psi/\partial\tau_1, \ldots, \partial\Psi/\partial\sigma_n, \partial\Psi/\partial\tau_n).$$

Этот определитель $\mathcal{T}(\sigma, \tau)$ в точке $\sigma(z), \tau = \sigma(\bar{z})$ не равен нулю. Действительно, из нашего условия о несовпадении вытекает, что ни одно из z_k не совпадает ни с одним из $-1/\bar{z}_l$. Таким образом, $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ образуют локальную голоморфную координатную систему на $\mathbb{C}P^{2n} = \mathrm{Sym}^{2n}(\mathbb{C}P^1)$ в некоторой окрестности рассматриваемой точки $\sigma, \tau = \bar{\sigma}$. То есть определитель $\mathcal{T}(\sigma, \tau)$ в этой точке не равен нулю. Но определитель, для которого мы хотим доказать его неравенство нулю, совпадает со значением $\mathcal{T}(\sigma, \bar{\sigma})$, поскольку $f_{2n-k} = (-1)^{n-k}\bar{f}_k$. Итак, мы доказали, что отображение $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}P^2) \to \mathbb{R}P^{2n}$ является локальным диффеоморфизмом.

Из п. 2 мы уже знаем, что это отображение является гомеоморфизмом. Теперь мы полностью доказали теорему 2.

5. Теорема Максвелла и $\mathbb{C}P^2/\mathrm{conj} \approx S^4$

Явные формулы из п. 4 позволяют также построить диффеоморфизм сферы S^{2n} в описанное ниже пространство орбит.

Начнем с комплексного многообразия $(\mathbb{C}P^1)^n$ упорядоченных наборов из n прямых в пространстве $\mathbb{C}^2$. На этом многообразии рассмотрим следующее гладкое (неголоморфное) действие группы Кокстера $D(n)$. Элемент из $D(n)$ действует перестановкой сомножителей, сопровождаемой заменой *четного* числа прямых на их эрмитово-ортогональные дополнения.

Теорема 8. $(\mathbb{C}P^1)^n/D(n) \approx S^{2n}$, *и соответствующий диффеоморфизм локально задается формулами из теоремы* 7.

Доказательство. Перестановки не меняют бинарную $2n$-форму f. Замена прямой на ее дополнение меняет знак соответствующего множителя $(z_k x + y)(x - \bar{z}_k y)$. Следовательно, четное число таких замен не меняет знака f (тогда как нечетное число замен — меняет).

Интересно, что доказанное таким образом соотношение $(\mathbb{C}P^1)^n/D(n) \approx S^{2n}$ можно рассматривать как неформальное продолжение теоремы Шевалле: пространство орбит действия вещественной $(2n-1)$-мерной группы на $\mathbb{C}^{2n}$ (которую нужно рассматривать как обобщение группы Кокстера) есть гладкое вещественное пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Пример. При $n = 2$ получаем

$$(\mathbb{C}P^1)^2/D(2) \approx S^4,$$

где группа $D(2)$, состоящая из 4-х элементов, действует на парах прямых из $\mathbb{C}^2$ перестановками и (возможно) заменами обеих прямых их эрмитовыми дополнениями.

Но $(\mathbb{C}P^1)^2/S(2) \approx \mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^2$. Следовательно $(\mathbb{C}P^1)^2/D(2) = \mathbb{C}P^2/(j)$, где (j) есть замена обеих прямых их дополнениями.

Рассмотрим комплексное многообразие $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^n$ неупорядоченных наборов из n прямых в пространстве $\mathbb{C}^2$. Действующая на $\mathbb{C}P^n$ операция j замены каждой прямой на эрмитово-ортогональную ей прямую является (антиголоморфной) инволюцией.

Теорема 9. *Для четных n инволюция $j\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ совпадает с комплексным сопряжением (в некоторых координатах).*

Доказательство. Коэффициенты формы

$$H_{z,w}(x,y) = \prod_{k=1}^{n}(z_k x + w_k y) = \sum_{k=0}^{n} h_k x^{n-k} y^k$$

являются естественными (однородными) координатами на $\mathbb{C}P^n = \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}P^1)$. Опишем действие j на коэффициентах h_k.

Перенесем действие j на двойственное пространство:

$$\bar{w}_k x - \bar{z}_k y = \overline{z_k(-\bar{y}) + w_k(\bar{x})}.$$

Таким образом, преобразованная форма задается формулой

$$H_{\bar{w},-\bar{z}}(x,y) = \overline{H_{z,w}(-\bar{y},\bar{x})}.$$

В терминах коэффициентов получаем следующее выражение для преобразованной формы:

$$\overline{\sum_{k=0}^{n} h_k(-\bar{y})^{n-k}(\bar{x})^k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\bar{h}_k x^k y^{n-k}.$$

Таким образом, действие j на коэффициентах формы H задается формулой $(jh)_k = (-1)^k \bar{h}_{n-k}$. Поскольку n четно, то получаем также $(jh)_{n-k} = (-1)^k \bar{h}_k$. Искомыми координатами являются $h_k + h_{n-k}$ и $i(h_k - h_{n-k})$ при четных k, и $i(h_k + h_{n-k})$ и $h_k - h_{n-k}$ при нечетных k (разумеется, мы никогда не рассматриваем $h_{n/2} - h_{n/2}$).

При $n = 2$ наши результаты сводятся к явной формуле классического диффеоморфизма $\mathbb{C}P^2/\mathrm{conj} \approx S^4$. «Теорема Максвелла»

$$(\mathbb{C}P^1)^n/D(n) \approx S^{2n}$$

продолжает этот диффеоморфизм на бóльшие размерности.

6. История теоремы Максвелла

Собственная версия Максвелла этой теоремы может быть найдена в его главной книге *Electricity and Magnetism*, том I, глава IX, разделы 129–133 (страницы 222–233 в [5]).

Сильвестр критиковал его рассуждение, говоря в [7]: «Я немного удивлен тем, что такой заслуженный автор не обратил внимание на то, что всегда существует одна и только одна *вещественная* система полюсов, соответствующая данной гармонике...

Со всем возможным уважением к огромным способностям профессора Максвелла, я должен признаться в том, что вывод чисто аналитических свойств сферических гармоник из „теоремы Грина“ и „принципа потенциальной энергии“..., как это сделано им, представляется мне неправильным методом, того же типа и настолько же убедительным, как ... если бы правило извлечения квадратного корня выводили из закона Архимеда о плавающих телах.»

Сильвестр предложил свой собственный подход, по-видимому эквивалентный приведенной выше теореме 5:

«Метод полюсов для представления сферических гармоник, изобретенный или развитый профессором Максвеллом, на самом деле сводится к выбору подходящей канонической формы тернарной квантики, сумма квадратов переменной которой (здесь — дифференциальных операторов) равна нулю.»

Тем не менее, Сильвестр не позаботился о том, чтобы детально разобрать этот вопрос («будучи очень стесненным во времени и спеша на пароход, уплывающий в Балтимор через 24 часа»). Детали доказательства появились в [6] и, позднее, в [3].

Сильвестр упомянул о связи своей теории интегралов от произведений сферических гармоник с теоремой Айвори о притяжении эллипсоида и предложил несколько обобщений этих идей.

Представляется, что ни алгебраические, ни философские идеи этой *Заметки* Сильвестра не были ни поняты, ни развиты математическим сообществом. Страницы, содержащие заметку, не были разрезаны в копии его *Collected Papers* в библиотеке Парижской Высшей Нормальной Школы.

Заметка содержит следующий (антибурбакистский) параграф:

«Никоим образом не необычно для математического исследования... что часть, в некотором смысле, больше целого — причина этого поразительного интеллектуального феномена состоит в том, что, применительно к математике, все величины и связи должны рассматриваться (как учит опыт) в состоянии непрерывного изменения, подобного течению потока.»

Эта общая философия приводит его к заключению о том, что «...общее утверждение должно доказываться легче, чем любой его частный случай».

Из того, как Сильвестр пришел к последнему заключению, мы можем вывести, что истинность этого очень важного принципа Сильвестра (заимствованного Бурбаки почти сто лет спустя) не влечет необходимости злосчастного окаменевания «потока» математики.

Литература

1. Арнольд В. И. Разветвленное накрытие $\mathbb{C}P^2 \to S^4$, гиперболичность и проективная топология. *Сибирск. матем. жур.* 1988, **29** (5), 36–47.
2. Арнольд В. И. О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм. *Функц. анализ.* 1971, **5** (3), 1–9.
3. Courant R. and Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. 1.— New York: Interscience, 1953. Ch. 7, § 5, p. 514–521.
4. Dupont J. L. and Lusztig G. On manifolds satisfying $w_1^2 = 0$. *Topology.* 1971, **10**, 81–92.
5. Maxwell J. C. Traité d'Electricité et de Magnétisme. T. 1, Paris: Gauthier-Villars, 1885.

6. O s t r o w s k i A. Die Maxwellsche Erzeugung der Kugelfunktionen. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 1925, **33**, 245–251.

7. S y l v e s t e r J. J. Note on spherical harmonics. *Philosophical Magazine.* 1876, II, 291–307.— The Collected Mathematical Papers of J. J. Sylvester. Vol. III.— Cambridge, 1909. P. 37–51.