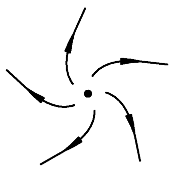
Приложение Б.

Задачи

1. Материалы семинаров

Задача 1. Дано векторное поле v с особой точкой типа фокус (см. рисунок). Найти все решения уравнения $L_v u = 0$.



Задача 2. Дано векторное поле v:

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = x.$$

На прямой $x = 1$ задана начальная функция задачи Коши.

а) Какое необходимо условие на начальную функцию $u|_{x=1}$, чтобы существовало решение задачи Коши?

б) Единственно ли это решение?

Задача 3. Дано уравнение:

$$u_t + uu_x = 0. \tag{$*$}$$

а) Найти его характеристики.

б) Показать, что уравнение Ньютона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

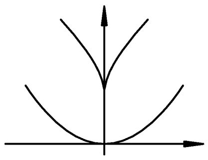
сводится к $(*)$ в предположении, что $\varphi(t)$ — положение частицы на прямой, а $u(t, x)$ — скорость частицы, находящейся в момент t в точке x прямой.

Задача 4. а) Исследовать существование и единственность решения уравнения

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1$$

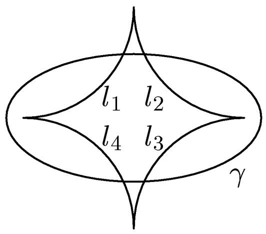
с начальным условием $f|_{y=x^2} = 0$ в областях $y \geqslant x^2$ и $y \leqslant x^2$.

б) Найти кривую (см. рисунок), ограничивающую область единственности решения. Доказать, что эта кривая — множество центров кривизны параболы $y = x^2$.



в) Сделать то же самое, но с начальным условием $f\Big|_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} = 0$.

г) Рассмотрим C^3 — малое возмущение эллипса. Возмущенная кривая γ изображена на рисунке, l_1, l_2, l_3, l_4 — длины дуг огибающей системы нормалей к γ. Доказать равенство: $l_1 + l_3 = l_2 + l_4$.



Задача 5. Существует ли и единственно ли решение задачи Коши

$$x(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + y^3\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u|_{y=0} = 1,$$

в окрестности точки $(x_0, 0)$ оси x?

Домашние задачи

Задача 6. Пусть $\alpha = du - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2$. Доказать, что не существует трехмерной интегральной поверхности.

Задача 7. Найти характеристики в $(2n+1)$-мерном пространстве 1-струй линейного однородного, неоднородного, квазилинейного уравнений.

Задача 8. Исследовать существование и единственность решения задачи $yu_x = xu_y$, $u|_{x=1} = \cos y$ в окрестности точки $(1, y_0)$.

Задача 9. Найти максимальное t, при котором решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \sin x, \qquad u|_{t=0} = 0$$

продолжается на $[0, t)$.

Волновое уравнение, волны, уравнение Кортевега – де Фриза

Задача 10. Найти характеристики волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Задача 11. Какой вид будет иметь волновое уравнение, если в качестве координат взять характеристики?

Задача 12. Найти общий вид решения волнового уравнения.

Задача 13. Для волнового уравнения задано начальное условие $u|_{t=0} = u_0(x)$. Найти решение с данным начальным условием. Единственно ли оно?

Задача 14. Уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ) $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$ при помощи замены $u = \varphi(x - ct)$ (ищем решение в виде бегущей волны) превратить в обыкновенное уравнение 2-го порядка.

Домашнее задание

Задача 15. Замена координат: $x^i = a^{ij} y_j$. Выразить $\dfrac{\partial u}{\partial x^i}$ через $\dfrac{\partial u}{\partial y^i}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$ через $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^i \partial y^j}$, и обратно.

Задача 16. Нарисовать фазовый портрет уравнения

$$\ddot{\varphi} = 3\varphi^2 + C\varphi + K$$

(уравнение КдФ после замены $u = \varphi(x - ct)$).

Задача 17. Найти на фазовой плоскости (см. задачу 16) решение в виде волны, для которой при $t \to \pm\infty$, $\varphi \to 0$.

Волновое уравнение

Задача 18. Доказать формулу Даламбера

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x - at) + \varphi(x + at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\, dy,$$

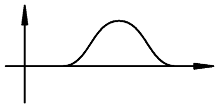
дающую решение уравнения струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с начальными условиями $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$.

В следующих задачах (№№19–24) речь идет о полуограниченной ($x \geqslant 0$) струне со свободным ($u_x(0,t) \equiv 0$) или закрепленным ($u(0,t) \equiv$ $\equiv 0$) левым концом.

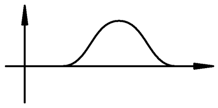
Задача 19. Пусть левый конец струны закреплен, и заданы начальные условия $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ для $x \geqslant 0$. Как продолжить функции φ и ψ на множество $x < 0$, чтобы ограничение решения полученной задачи Коши на область $\{(x,t)\colon x \geqslant 0\}$ совпало с решением исходной задачи Коши?

Задача 20. То же самое для струны со свободным левым концом.

Задачи 21–24. Нарисуйте мультфильмы (т. е. изображения решений задачи Коши для различных значений $t \geqslant 0$) для следующих начальных условий:

21. $\varphi(x)\colon$ , $\psi(x) \equiv 0$, конец $x = 0$ закреплен.

22. То же самое, но конец $x = 0$ свободен.

23. $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x)\colon$ , конец $x = 0$ закреплен.

24. То же самое, но конец $x = 0$ свободен.

Задача 25. Нарисуйте мультфильмы для начальных условий, как в задачах 21–24, но для ограниченной ($0 \leqslant x \leqslant l$) струны, для следующих случаев:

а) оба конца свободны, б) оба конца закреплены,

в) один конец закреплен, а другой свободен.

Домашнее задание

Задача 26. Найти общее решение задачи Коши для ограниченной струны с граничными условиями $u|_{x=0} = f(t)$, $u|_{x=l} = 0$, если:

а) $u|_{t=0} = u_t|_{t=0}$, б) $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$.

Задача 27. Пусть в условиях предыдущей задачи $f(t)$ — периодическая с периодом T.

а) Будет ли решение $u(x,t)$ периодической функцией по t при каких-либо φ и ψ?

б) Проверить, что периодическое решение отсутствует при $T =$ $= (p/q)\tau$, где p и q — целые числа, $\tau = 2l/a$.

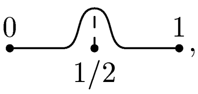
Контрольная работа

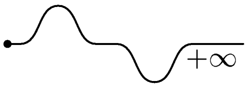
Вариант 1

1. Решить задачу Коши $xu_x + u_y = 0, \quad u|_{y=0} = \sin x$.

2. При каких значениях t решение задачи Коши $u_t + uu_x = -x^3$, $u|_{t=0} = 0$ продолжается на весь полуинтервал $[0, t)$?

3. Нарисовать мультфильмы:

а) $u_{tt} = u_{xx}, \quad \varphi \equiv 0, \quad \psi$: , конец $x = 0$ закреплен, конец $x = 1$ свободен;

б) $u_{tt} = u_{xx}, \; u|_{t=0}$: , $u_t|_{t=0} \equiv 0, \; u|_{x=0} \equiv 0$.

4. Найти решение задачи Коши $u_{tt} = u_{xx}$ с начальным условием $u|_{t=0} = \sin^3 x, \; u_t|_{t=0} = \sin x$.

5. Дан ряд $1 + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots + \frac{1}{n}\cos nx + \ldots$. Является ли этот ряд рядом Фурье функции класса C^1?

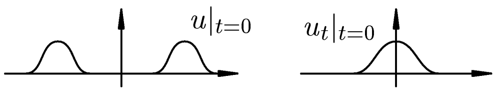
6. Пусть $\{\varphi_k\}$ — ортонормальная система. Ряд $\sum(f, \varphi_k)\varphi_k$ сходится к f в L_2. Выразить $\|f\|_{L_2}$ через коэффициенты Фурье (равенство Парсеваля).

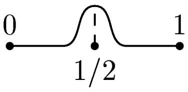
Вариант 2

1. Исчерпываются ли решения уравнения $x\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\dfrac{\partial u}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$ функциями от xy?

2. Найти решение уравнения $yuu_x + xuu_y = xy$, график которого проходит через кривую $x = y^2 + u^2 = 1$.

3. Нарисовать мультфильмы

а) $u_{tt} = u_{xx}$, ;

б) $u_{tt} = u_{xx}, \; \varphi$: , $\psi \equiv 0$, конец $x = 0$ закреплен, конец $x = 1$ свободен.

4. Решить задачу Коши $u_{tt} = u_{xx}$ с начальными условиями $u|_{t=0} = \cos x, \; u_t|_{t=0} = \cos^3 x$.

5. Дан ряд $1+\dfrac{1}{2\ln 2}\cos 2x+\ldots+\dfrac{1}{n\ln n}\cos nx+\ldots$ Является ли этот ряд рядом Фурье функции класса C^1?

6. Пусть $\varphi \in C^\omega(S^1)$, точнее, функция φ голоморфна в $|\operatorname{Im} z| < \beta$; $\varphi(z+2\pi)=\varphi(z)$. Доказать, что $|\alpha_k| < ce^{-\beta k}$.

Консервативные системы. Фигуры Лиссажу

Задача 28. Дано уравнение $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

а) Найти все решения.

б) Пусть решение имеет вид: $A\sin\omega t + B\cos\omega t = C\sin(\omega t+\varphi)$. Доказать, что $A^2+B^2=C^2$.

Далее рассматривается уравнение

$$\ddot{x} = -\nabla U(x). \tag{Б.1}$$

Задача 29. Задан потенциал $U(x_1,x_2) = \dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$. Найти все решения уравнения (Б.1) в виде, указанном в п. б) задачи 28.

Задача 30. Дан потенциал $U(x_1,x_2) = x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2$. Найти все решения уравнения (Б.1). Как ведут себя решения на плоскости (x_1,x_2)?

Задача 31. Доказать, что полная энергия консервативной системы (Б.1) есть первый интеграл этой системы.

Далее рассматривается потенциал $U(x) = \dfrac{x_1^2}{2}+\dfrac{\omega^2 x_2^2}{2}$. Общее решение уравнения (Б.1) при подходящем выборе начала отсчета времени t записывается в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin t,\\ x_2 &= A_2\sin(\omega t+\varphi). \end{aligned}$$

Задача 32. Пусть $\omega = 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}, \pi, 0$. Как будут выглядеть фигуры Лиссажу в прямоугольнике $|x_1| \leqslant A_1$, $|x_2| \leqslant A_2$? Что будет происходить, если φ меняется от 0 до π? Найти коэффициенты гомотетии эллипсов $U(x_1,x_2)=E$ и фигуры Лиссажу при $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Домашнее задание

Задача 33. Дан потенциал $U(x,y) = 5x^2+5y^2-7xy$. Решить уравнение (Б.1).

Задача 34. Дан потенциал $U(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2}{2} + \dfrac{1}{2}\omega^2 x_2^2$. Рассмотрим эллипс $U(x_1, x_2) \leqslant E$. Пусть $E_1 = \dfrac{\dot{x}_1^2}{2} + \dfrac{x_1^2}{2}$, $E_2 = \dfrac{\dot{x}_2^2}{2} + \dfrac{\omega^2 x_2^2}{2}$, $E = E_1 + E_2$. Тогда x_1, x_2 лежат в полосах $|x_1| \leqslant \sqrt{2E_1}$, $|x_2| \leqslant \sqrt{2E_2}$. Доказать, что прямоугольник $|x_1| \leqslant \sqrt{2E_1} = A_1$, $|x_2| \leqslant \sqrt{2E_2} = A_2$ вписан в эллипс $U(x_1, x_2) \leqslant E$.

Задача 35. Доказать, что если:

а) $\omega = \dfrac{m}{n}$, то фигура Лиссажу — замкнутая кривая,

б) $\omega \notin \mathbb{Q}$, то — незамкнутая.

Задача 36. Доказать, что если $\omega = n$, то существует фаза φ такая, что фигурой Лиссажу будет график многочлена степени n (многочлена Чебышева) $(p(x) = \cos(n \arccos x))$.

Задача 37. Дан эллипс $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ и дуга синусоиды $y = 3\cos(x/4)$, где $0 \leqslant x \leqslant 8\pi$. Доказать, что длины этих кривых равны.

Гармонические функции

Задача 38. Доказать, что угол, под которым виден отрезок из точки его плоскости — гармоническая функция на накрывающей плоскости без двух концевых точек отрезка.

Задача 39. Построить функцию f, гармоническую в круге и принимающую на дугах S_1, S_2, $S_1 \cup S_2 = S^1$, заданные значения C_1, C_2.

Задача 40. Решить аналогичную задачу для разбиения окружности на n дуг $S_1, \ldots, S_n$; значения на дугах $C_1, \ldots, C_n$.

Задача 41. Записать уравнения Ньютона движения свободной частицы в полярной системе координат.

Домашнее задание

Задача 42. Доказать, что лагранжианы $L_1 = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}$, $L_2 = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ доставляют наименьшее действие на одной и той же кривой (кратчайшей, соединяющей две точки).

Задача 43. Вычислить Δ в полярных и сферических координатах.

Задача 44. Доказать, что величина телесного угла, под которым виден из подвижной точки пространства фиксированный замкнутый контур в $\mathbb{R}^3$, — гармоническая на накрывающем дополнение к этому контуру многообразии функция этой подвижной точки.

2. Задачи письменного экзамена

1995 год[1]

1 (1). Является ли гладкой поверхность в евклидовом пространстве

$$z = r^2 + \frac{2}{9} \qquad (*)$$

(где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$)? Выпукла ли она? Найдите ее кривизну.

2 (2). Найти значение в начале координат потенциала двойного слоя плотности 1, распределенного вдоль поверхности $(*)$.

3 $(1, 2, 3, 3, 6)$. Вычислить средние значения по поверхности $(*)$ следующих функций:

а) z; б) $1/r$; в) z/r^3; г) r^2; д) $1/r^3$.

4 (5). Решить внутреннюю задачу Дирихле с краевым условием $u = 1/r^3$ на поверхности $(*)$ (для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$.)

5 (5). Рассмотрим потенциал простого слоя плотности z, распределенного по поверхности $(*)$. Найти среднее значение этого потенциала по поверхности сферы $r^2 = 1$.

6 $(2, 4)$. Найти верхнюю и нижнюю грани интеграла Дирихле

$$\iiint (\operatorname{grad} u)^2 \, dx\, dy\, dz$$

по области, ограниченной поверхностью $(*)$, на множестве гладких функций в замыкании этой области, совпадающих с r^2 на ее границе.

7 (6). Найти при малых $|t|$ значение в точке $(x = y = 0, z = 1/2)$ решения f уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \operatorname{grad} u) = f^2$$

с начальным условием ($f \equiv 1$ при $t = 0$), где u — решение задачи 4.

[1] Рядом с номером каждой задачи в скобках указано количество баллов за правильное решение задачи (частей задачи). Предполагаемые критерии отметок при трехчасовом экзамене: удовлетворительно — 12, хорошо — 16, отлично — 26 (при максимуме 40).

У к а з а н и е: для этого не обязательно знать ответ задачи 4, задачу 7 можно решать независимо.

1996 год

1. Дано векторное поле $v(x, y) = y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ и функция $u|_{x=1} = f(y)$. При каком условии на f в окрестности точки $(1, 0)$ существует решение задачи Коши для уравнений $L_v u = 0$? Единственно ли оно?

2. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = -\nabla U(x), \qquad (**)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $U(x) = x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_2$. При каких (вещественных) значениях a все решения уравнения $(**)$ периодичны?

3. На двух прямых в $\mathbb{R}^3$ распределен электрический заряд: на прямой $z = 1$, $y = x$ с плотностью 1 и на прямой $z = -1$, $y = -x$ с плотностью -1. Найти эквипотенциальные поверхности поля, созданного этими зарядами.

4. На сфере $S^2\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$ задана функция v, гармоническая всюду, кроме точки $N = (0, 0, 1)$. Пусть $\mathbb{R}^2$ — плоскость $z = 0$ и $p\colon S^2 \setminus N \to \mathbb{R}^2$ — стереографическая проекция. Пусть $u(x, y) = v(p^{-1}(x, y))$. Доказать, что $\int\limits_0^{2\pi} u_r(1, \varphi)\, d\varphi = 0$.