ЧАСТЬ 1
ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

1. Специальная теория относительности

Утверждение о евклидовости пространства бессмысленно, пока не указаны физические объекты, соответствующие точкам, прямым и т. д.

Движение в механике — это изменение *положения* тела. Под положением понимается *относительное положение*, положение относительно других тел. Понятие абсолютного положения, положения в *абсолютном пространстве* лишено физического содержания.

Тело или система тел, относительно которых определяется положение, — это пространственная система отсчета.

Утверждение о том, что два неодновременных события произошли в одном месте, лишено физического содержания. Представьте, например, что вы едете в поезде. То, что происходит в одном месте для вас, происходит в разных местах для наблюдателя на станции.

В качестве пространственной системы отсчета можно взять твердое тело, в качестве координатных осей — твердые стержни, про которые, как мы предполагаем, *верны утверждения евклидовой трехмерной геометрии*. Их надо проверять. Например, Гаусс проверил равенство суммы углов треугольника 180° для трех горных вершин на расстоянии $\approx$ 100 км. Расчет движения планет и спутников дает лучшую точность. При этом евклидовость геометрии пространства является лишь частью предположений, роль прямых в ней играют лучи света, а не стержни.

Так же можно проверять, что длина твердого стержня не зависит от пути переноса.

Можно брать разные системы координат. Переходы от одной ортогональной системы координат к другой образуют группу движений трехмерного евклидова пространства, состоящую из вращений и сдвигов.

В качестве простейших можно взять вращения (XY), (YZ), (ZX) и сдвиги ($x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$).

Длина твердого стержня не меняется при движениях. Другими словами,

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

является инвариантом. Это свойство — результат соглашения и экспериментальной проверки.

Итак, *пространство изотропно и однородно* или *пространство евклидово*.

Время

Время измеряется *часами*. Часы — это тело (система тел), совершающее периодический процесс. Примеры: маятник, вращение Земли, колебание электромагнитного поля.

Колебания часов, выбранных в качестве эталона, считаются равномерными по определению.

Пространственно-временная система отсчета

Если в каком-то месте есть часы, мы можем определять моменты, в которые в этом месте происходят события.

Если события происходят в разных местах, то надо определить, что значит, что они одновременны.

Эйнштейн предложил следующий способ определения синхронности часов. Часы в точках A и B назовем синхронными, если лучи света, одновременно вышедшие из середины отрезка AB в направлении точек A и B, достигают этих точек при одинаковых показаниях часов. Нужно проверять, что понятие синхронных часов по Эйнштейну транзитивно, т. е. если часы в точках A и B синхронны и часы в точках B и C синхронны, то и часы в точках A и C синхронны. Совокупность физических опытов является такой проверкой.

Принцип относительности Галилея

Инерциальной системой отсчета называется система, в которой график движения свободной материальной точки — прямая.

Инерциальные системы существуют, и их много. Это экспериментальный факт. Если система движется относительно некоторой инерциальной системы отсчета равномерно и прямолинейно, то она также является инерциальной (т. е. положение движущейся системы в каждый момент времени получается из предшествующего сдвигом, причем равным промежуткам времени отвечают равные сдвиги). Это утверждение называется *законом инерции*.

Естественно считать, что если у системы тел в некоторый момент заданы положения и скорости, то они однозначно определяют их положения и скорости в будущем. Этот принцип называется *принципом причинности*.

Если совершить преобразование начальных условий (сдвиг в пространстве, вращение, сдвиг времени), то движение совершается по траектории, полученной тем же преобразованием.

Ньютон предполагал (и это экспериментально подтверждается с некоторой точностью), что при переходе от одной инерциальной системы к другой не меняются масштаб и время. Например, если система движется в направлении оси x со скоростью v, то координаты преобразуются по следующему правилу: $x' = x + vt$, $t' = t$.

Такие преобразования образуют *группу Галилея*. Уравнение $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ — инвариант этой группы.

Следствие. Если система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью V, а в системе отсчета K скорость тела равна v, то $v' = v + V$.

Свет

Свет имеет конечную скорость, волновые свойства и электромагнитную природу. Так как свет имеет волновые свойства, возникло предположение, что это колебание некоторой среды — эфира, — подобно волнам на воде. Это означало, что существует выделенная система координат, в которой эфир неподвижен. С целью обнаружить скорость Земли относительно эфира был произведен опыт Майкельсона. Его результат: скорость относительно эфира равна 0. Возникло предположение, что эфир увлекается Землей. Но это предположение опровергается опытом Физо и аберрацией при наблюдении звезд. Итак, эфира не существует.

Отрицательный результат опыта Майкельсона можно объяснить также *гипотезой истечения Ритца* о том, что свет имеет постоянную скорость относительно источника излучения, а не относительно наблюдателя. Но эта гипотеза опровергается наблюдением двойных звезд.

Опыт Кеннеди и Торнадийка прямо проверяет одинаковость скоростей света в разных система отсчета. В этом опыте в интерферометре Майкельсона различная длина плеч инструмента приводит к интерференции, и экспериментатор может наблюдать, смещаются ли интерференционные полосы в течение долгого времени — когда Земля реализует разные системы отсчета.

Два принципа могут объяснить все эти факты.

A) Принцип относительности (включая одинаковость скорости света относительно неподвижного источника в разных инерциальных системах).
B) Независимость скорости света от движения источника в одной инерциальной системе отсчета.

Вместе эти принципы противоречат ньютонову понятию *одновременности* (априорному, метафизическому) и тем самым преобразованиям Галилея, а именно, утверждению

$$t' = t \;\text{ и }\; \Delta x' = \Delta x \;\text{ для }\; t_1 = t_2.$$

Значит, преобразования Галилея надо изменить.

Попробуем найти преобразования координат при переходе в систему отсчета, движущуюся относительно данной со скоростью V по оси x, $x' = x'(x,t)$ и $t' = t'(x,t)$, которые удовлетворяют следующим требованиям:

(1) прямые (график движения свободной частицы) переходят в прямые. Это принцип относительности.
(2) Световой конус (график движения света) переходит в себя. Это — принцип независимости скорости света от движения источника.
(3) Преобразование со скоростью $-V$ является обратным к преобразованию со скоростью V.

(4) Композиция преобразования со скоростью $-V$ и отражения — преобразование со скоростью V.

Из (1) и того факта, что бесконечные точки переходят в бесконечные, следует линейность.

Вместо (1) можно потребовать однородность пространства и времени, что означает, что промежутку времени Δt в системе K соответствует определенный промежуток $\Delta t'$ в системе K', и сдвиг $\Delta x'$ не зависит от x и t.

Выведем такое преобразование в случае одной пространственной координаты x.

В силу линейности

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = A(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

Следствием этих формул является принцип относительности: равномерное движение в системе K остается таковым и в системе K'. Это не удивительно, ибо мы уже требовали выполнения этого принципа, когда сказали, что одинаковые промежутки времени и одинаковые масштабы в разные моменты времени и разных точках пространства в системе K остаются таковыми и в системе K'.

Если потребовать, чтобы световой конус переходил в себя (т. е. $(ct)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (ct')^2 - (x')^2 = 0$), то с учетом линейности получим

$$(ct')^2 - (x')^2 = \lambda(v)[(ct)^2 - x^2],$$

кроме того, $\lambda(v)\lambda(-v) = 1$. Сделав отражение $x \to -x$, $v \to -v$, получаем $\lambda(v) = \lambda(-v)$, следовательно, $\lambda(v) = 1$. Из этого следует, что преобразование координат имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x' = \operatorname{ch}\alpha \cdot x + \operatorname{sh}\alpha \cdot ct, \\ t' = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{c} \cdot x + \operatorname{ch}\alpha \cdot t. \end{cases}$$

Подставим $x = 0$:

$$x' = \operatorname{th}\alpha \cdot ct' = vt'.$$

Поэтому $\operatorname{th}\alpha = v/c$. Итак,

$$x' = \frac{x + v_1 t}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}; \quad t' = \frac{t + v_1 x/c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}.$$

Или наоборот:

$$x = \frac{x' - v_1 t'}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}; \quad t = \frac{t' - v_1 x'/c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}.$$

Найдем скорость движения системы K'' относительно K, если K'' движется относительно K' со скоростью v_2, проверив заодно групповой закон:

$$x'' = \frac{x' + v_2 t'}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}; \quad t'' = \frac{t' + v_2 x'/c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}$$

$$x'' = \frac{x + (v_2 + v_1)t + v_2 v_1 x/c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}.$$

Это значит, что

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}.$$

Итак, преобразования координат при переходе из одной системы отсчета в другую образуют группу — группу Лоренца.

Принцип относительности Эйнштейна утверждает, что законы природы инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Преобразование масштабов и замедление часов

Сокращение масштаба. Пусть неподвижный стержень длины L, координаты концов которого $x_1 = 0$ и $x_2 = L$, покоится в системе K, движущейся со скоростью v относительно системы K'. Найдем координаты x_1' и x_2' его концов в системе K' в момент времени t'. Последняя фраза, по существу, является определением: длина стержня в системе K' — это разность координат его концов в некоторый единый момент времени. Это означает, что события измерений координат концов стержня в системе K' являются одновременными. Но эти события в системе K уже не одновременны (см. рис. 1.1).

Обозначим через A и B события с координатами $(x_A, t_A) = (0, 0)$ и $(x_B, t_B) = (L, 0)$ в системе K, а через C — событие, задаваемое положением начала стержня в системе K' в момент времени $t_C' =$

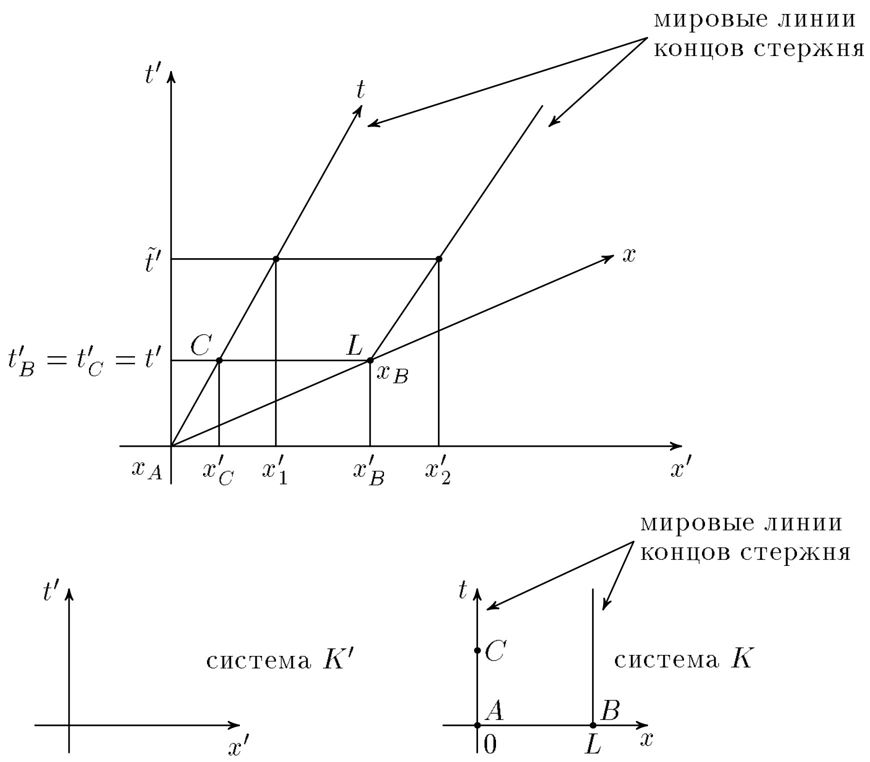

Рис. 1.1.

$= t'_B = t'$. Из формул предыдущей лекции получаем:

$$x'_B = \frac{x_B + vt_B}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

$$t'_B = \frac{t_B + vx_B/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{vL/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = t'_C = t';$$

$$t'_C = \frac{t_C + vx_C/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad t_C = t'_C\sqrt{1 - v^2/c^2} = vL/c^2.$$

Следовательно

$$x'_C = \frac{x_C + vt_C}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{Lv^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

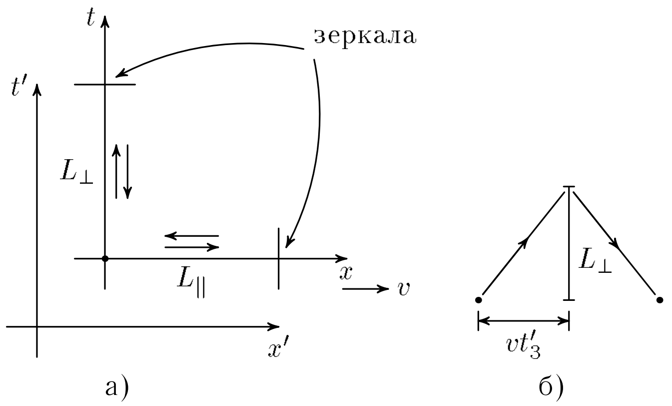

Рис. 1.2.

и

$$L' = x'_2 - x'_1 = x'_B - x'_C = \\ = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{Lv^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = L\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Этот же результат можно получить и другим способом.

Рассмотрим эксперимент Майкельсона в системе отсчета, движущейся параллельно одной из осей системе отсчета. В движущейся системе отсчета K свет, пущенный в двух перпендикулярных направлениях, возвращается одновременно, ибо расстояния одинаковы и равны $2L$ (см. рис. 1.2а), $L_\perp = L_{||} = L$. При наблюдении из неподвижной системы K'

$$\begin{cases} t'_1 c = L_{||} + vt'_1 & \text{(свет бежит вправо)} \\ t'_2 c = L_{||} - vt'_2 & \text{(свет бежит влево);} \end{cases}$$

время в перпендикулярном к движению направлении

$$t'_3 = \frac{2L_\perp}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Для движения в продольном направлении (см. рис. 1.2б) $L_\perp^2 + v^2 {t'_3}^2 = c^2 {t'_3}^2$, $t'_3 = \dfrac{L_\perp}{\sqrt{c^2 - v^2}}$. Из равенства $2t'_3 = t'_1 + t'_2$ следует, что $L_{||} =$

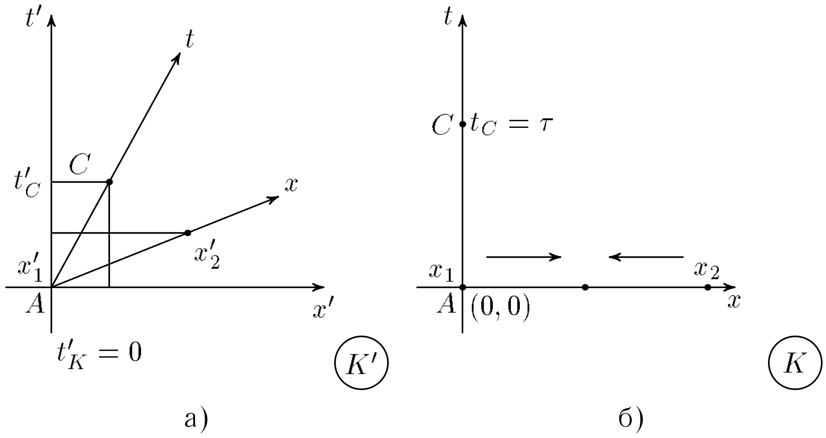

Рис. 1.3.

$= L_\perp\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$. Время в продольном направлении

$$t'_1 + t'_2 = \frac{L_{||}}{c+v} + \frac{L_{||}}{c-v}.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{L_{||}}{L_\perp} = \dfrac{\sqrt{c^2-v^2}}{c}$. Но поперечный масштаб меняться не может, ибо это противоречит принципу относительности. Действительно, возьмем два одинаковых поперечных кольца, сближающихся со скоростью v. Если, например, движущееся кольцо сжимается, то оно должно пройти внутри покоящегося. А наблюдатель, связанный с ним, увидит, что другое кольцо пройдет внутри. Абсурд. Значит, $L_\perp = L$ и $L_{||} = L\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Удлинение времени. Возьмем в движущейся системе K два события $(0,0)$ и $(0, t_C = \tau)$ (см. рис. 1.3). Найдем t'_C и $\tau' = t'_C - t'_A$. (В пространстве (x,t) и (x',t') метрика не евклидова, поэтому некоторые «катеты» длиннее «гипотенузы»; x_1 и x_2 одновременны в K, но не одновременны в K'.) Получаем

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Удлинение времени поясняется мысленным экспериментом с часами Фейнмана. Часы образованы двумя параллельными зеркалами, между которыми перпендикулярно бегает луч света, который издает «тик», приходя к зеркалу. Пусть часы Фейнмана движутся со скоростью v параллельно зеркалам. Скорость света для покоящегося наблюдателя и движущегося вместе с часами одинакова, а расстояние для покоящегося наблюдателя в $\dfrac{c}{\sqrt{c^2-u^2}}$ раз больше. Во столько же раз замедляются движущиеся часы для неподвижного наблюдателя, ибо поперечная длина не меняется. Любые другие часы будут идти так же, иначе можно было бы внутри корабля измерить его скорость, что нарушает принцип относительности.

Нарушение одновременности. Пусть система отсчета K движется относительно системы K' со скоростью v. Пусть в точках X_1 и X_2 происходят одновременные события — приход сигналов, выпущенных из середины отрезка. Как отличаются времена этих событий в системе K' (см. рис.1.3б)?

$$ct_1'+vt_1'=\frac{x_2-x_1}{2}\cdot\sqrt{1-v^2/c^2};\quad ct_2'-vt_2'=\frac{x_2-x_1}{2}\cdot\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Отсюда

$$t_2'-t_1'=\frac{(x_2-x_1)v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Соберем теперь все эти факты вместе.

Преобразование продольной координаты

$$x'=x\cdot\sqrt{1-v^2/c^2}+vt'.$$

Эта формула означает, что начало координат системы K движется относительно K' со скоростью u, а масштаб сжат.

Преобразование времени имеет вид

$$t'=\frac{vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Здесь первый член — сдвиг времени на движущихся часах, а второй — растяжение времени.

Подставляя t' из B в A, получаем:

$$\begin{cases} x'=\frac{x+vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\\ t'=\frac{t+vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.\end{cases}$$

Преобразование скорости. Напишем формулы для дифференциалов координат:

$$dx' = \frac{dx + v\,dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad dy' = dy; \quad dz' = dz; \quad dt' = \frac{dt + v\,dx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Получаем:

$$v'_x = \frac{v_x + v}{1 + v_x v/c^2}; \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v_x v/c^2}; \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v_x v/c^2}.$$

Другой вывод формул преобразования скоростей был приведен вместе с выводом преобразований Лоренца.

Пространство Минковского

Положим $x_0 = ct$. *Пространство Минковского* — это псевдоевклидово пространство (x_0, x_1, x_2, x_3) с метрикой $l^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Расстояние между двумя точками в такой метрике называют *интервалом*. *Группа Лоренца* — это группа движений этого пространства. Точка этого пространства (мировая точка) — *событие*. *Мировая линия* — траектория частицы.

Интервалы на световом конусе ($l^2 = 0$) называют *световыми*, внутри конуса ($l^2 > 0$) — *времениподобными*, вне конуса ($l^2 < 0$) — *пространственноподобными*. Для любого времениподобного интервала можно выбрать инерциальную систему отсчета так, что эти события оказываются в одном месте, но в разное время. Пространственноподобные интервалы заменой системы координат можно перевести в одновременные, но в разном месте.

Принцип относительности

Принцип относительности Эйнштейна утверждает, что законы природы инвариантны при переходе из одной инерциальной системы координат в другую, при этом координаты преобразуются согласно преобразованиям Лоренца.

Этот принцип все время проверяется — все вновь открываемые законы физики должны удовлетворять принципу относительности

Эйнштейна; если будет открыт закон, не удовлетворяющий принципу Эйнштейна, принцип придется пересмотреть.

С другой стороны, этот принцип играет эвристическую роль, ограничивая форму уравнений движения.

Структура пространства-времени. Сравним две структуры пространства-времени — галилеевскую и релятивистскую. В каждой из них события параметризуются точками четырехмерного пространства, параллельные переносы которого образуют $\mathbb{R}^4$.

В галилеевской структуре определено линейное отображение $t\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ — время. Если события одновременны ($t(b) - t(a) = 0$), между ними определено евклидово расстояние, т. е.множество одновременных событий образуют $\mathbb{R}^3$. И временно́е, и пространственное расстояния сохраняются при преобразованиях Галилея.

В релятивистском случае между каждыми двумя событиями a и b определен интервал $(a^0-b^0)^2-(a^1-b^1)^2-(a^2-b^2)^2-(a^3-b^3)^2$. Группа Пуанкаре состоит из аффинных преобразований, сохраняющих этот интервал.

Аберрация

Выпишем еще раз преобразования Лоренца в случае, если вторая система отсчета движется относительно первой со скоростью u в направлении оси x.

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - Ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Формулы преобразования скоростей:

$$v'_x = \frac{v_x + u}{1 + v_x u/c^2}; \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + v_x u/c^2}; \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + v_x u/c^2}.$$

Пусть $v_z = v'_z = 0$, $v_x = v \cdot \cos\Theta$ и $v_y = v \cdot \sin\Theta$. Тогда

$$\operatorname{tg}\Theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v\sqrt{1 - u^2/c^2} \cdot \sin\Theta}{v \cdot \cos\Theta + u}.$$

В частности, если $v = c$, то

$$\operatorname{tg}\Theta' = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2} \cdot \sin\Theta}{\cos\Theta + u/c},$$

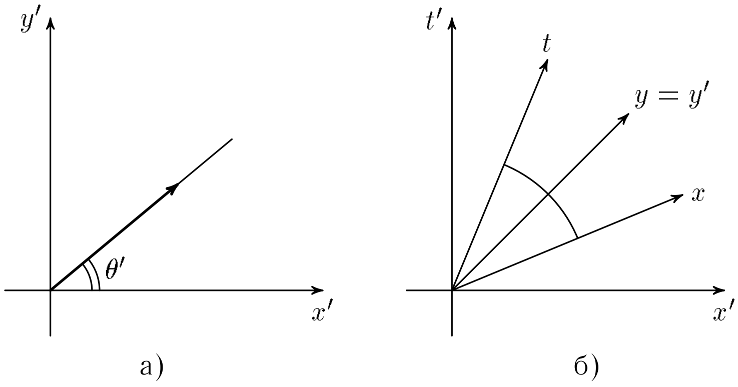

Рис. 1.4.

или

$$\sin\Theta' = \frac{v'_y}{c} = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}\cdot\sin\Theta}{1+\cos\Theta\cdot u/c}.$$

Пусть $u/c \ll 1$. Тогда

$$\sin\Theta' = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}\cdot\sin\Theta}{1+\cos\Theta\cdot u/c} \approx \sin\Theta\cdot(1-u^2/2c^2)\times$$
$$\times(1-\cos\Theta\cdot u/c) \approx \sin\Theta\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\Theta-\frac{u^2}{c^2}\right),$$
$$\Theta-\Theta' = -\frac{u}{c}\sin\Theta-\frac{u^2}{2c^2}\cdot\operatorname{tg}\Theta.$$

Здесь Θ — угол, например, на земле, а Θ' — угол относительно Солнца.

Множество преобразований, сохраняющих форму $t^2-x^2-y^2-z^2$, состоит из четырех связных компонент, а именно:

1) Связная компонента единицы.
2) Связная компонента пространственного отражения $P\colon x^i \to -x^i$, $x^0 \to x^0$ (латинскими буквами обозначаются пространственные координаты $1, 2, 3$, а греческими буквами — все координаты).
3) Связная компонента обращения времени $T\colon x^i \to x^i, x^0 \to -x^0$.
4) Связная компонента преобразования PT.

Каждому вектору x^μ поставим в соответствие эрмитову матрицу размера 2×2:

$$\widehat{x} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x^0 \mathbb{1} + x^i \sigma^i.$$

При изменении системы отсчета эта матрица преобразуется по правилу $\widehat{x}' = U^+ \widehat{x} U$, где $U \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Очевидно, что для каждого собственного преобразования Лоренца (преобразований из связной компоненты единицы) существуют два элемента $U \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ и тем самым получается двумерное представление группы Лоренца $\psi \mapsto U\psi$ где $\psi = \binom{\psi_1}{\psi_2}$ — *двухкомпонентный спинор Вейля*.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (уравнение Вейля) $(\partial_0 + \sigma^i \partial_i)\psi = 0$. Это уравнение инвариантно относительно собственных преобразований Лоренца.

Поскольку физики до пятидесятых годов XX века считали, что в природе имеется инвариантность относительно полной группы Лоренца, включающей отражения, то вместо этого уравнения рассматривались другие уравнения (уравнения Дирака):

$$\begin{cases} (\partial_0 + \sigma^i \partial_i)\psi = m\overline{\psi}, \\ (\partial_0 - \sigma^i \partial_i)\overline{\psi} = m\psi. \end{cases}$$

Уравнения Дирака инвариантны относительно P ($P\psi = \overline{\psi}$). Физический смысл m — масса, и эти уравнения описывают электроны.

Отступление. В 1956 году было открыто, что зеркальная симметрия P нарушается при слабом взаимодействии. Тогда Ландау предположил (и это подтвердилось), что нейтрино (у которого $m = 0$) описывается уравнением Вейля, а в зеркале мы видим антинейтрино. Нейтрино удовлетворяет CP-симметрии, где C — замена частицы на античастицу.

Вместо прямого произведения симметрий реализуется их комбинация.

Энергия и импульс релятивистской частицы

Важную роль в физике играют законы сохранения. В классической механике частицы обладают импульсом $\vec{p} = m\vec{v}$ и энергией $E = \dfrac{m\vec{v}^{\,2}}{2}$.

Очевидно, они сохраняются при движении одной частицы. Более того, сумма таких величин сохраняется и при столкновениях. Такие величины называют интегралами движения.

Однако при преобразованиях Лоренца эти величины не преобразуются так, как должны преобразовываться. Поэтому они интегралами движения быть не могут.

Постулируем (пока), что и в релятивистском случае частица обладает четырьмя первыми интегралами, причем E — скаляр относительно вращений, а $\vec{p}$ — вектор при вращениях.

Импульс должен быть вектором, одинаковым по направлению со скоростью, а величина его должна зависеть только от величины скорости. Таким образом, $\vec{p} = m(v^2)\vec{v}$, где m — некоторая функция. Аналогично $E = E(v^2)$.

Проведем следующий мысленный эксперимент. Наблюдатели K и K', расположенные в плоскости Oxy, движутся друг относительно друга с относительной скоростью v по оси x. Они бросают вдоль координаты y одинаковые шары с одинаковой по величине скоростью u так, чтобы произошло лобовое столкновение этих шаров.

Рассмотрим скорости шаров в системе координат, в которой K покоится. До столкновения: $v_x^A = 0$, $v_x^B = v$, $v_y^A = u$, $v_y^B = -u\sqrt{1 - v^2/c^2}$. После удара: $\widetilde{v}_x^A = 0$, $\widetilde{v}_x^B = v$, $\widetilde{v}_y^A = -u'$, $\widetilde{v}_y^B = u'\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Так как должно быть $p_x^A + p_x^B = \widetilde{p}_x^A + \widetilde{p}_x^B$, имеем

$$v \cdot m\left(v^2 + u^2 - \frac{u^2v^2}{c^2}\right) = v \cdot m\left(v^2 + (u')^2 - \frac{(u')^2v^2}{c^2}\right),$$

поэтому, если m взаимно однозначна, $u = u'$ или $u = -u'$. Также должно выполняться равенство $p_y^A + p_y^B = \widetilde{p}_y^A + \widetilde{p}_y^B$. Это значит, что

$$m(u^2) - \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot m\left(v^2 + (u')^2 - \frac{(u')^2v^2}{c^2}\right) = 0.$$

Подставив $u = 0$, получаем

$$m(v^2) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Величина $m(0) = m$ называется массой покоя. Следовательно, импульс равен

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

При изменении системы координат импульс преобразуется следующим образом:

$$p'_x = \frac{m\frac{v+u}{1+vu/c^2}}{\sqrt{1 - \frac{(v/c+u/c)^2}{(1+uv/c^2)^2}}} = \frac{mv + mu}{\sqrt{1 - v^2/c^2}\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{p_x + uE/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

где

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad E' = \frac{E + up}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Таким образом, $(E, \vec{p})$ — 4-вектор. При малых v

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Заметим, что $E^2 - \vec{p}\,^2c^2 = m^2c^4$, $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Интервал: $(\Delta l)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2$.

Пусть $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, тогда $(\Delta l)^2 = g_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu$.

Физики используют запись (придуманную Эйнштейном), согласно которой по повторяющимся индексам происходит суммирование. Кроме того, обычно греческие индексы принимают значения $0, 1, 2, 3$, а латинские — только $1, 2, 3$.

Линейные преобразования, сохраняющие интервал $(\Delta l)^2$, называются *преобразованиями Лоренца*: $x^\mu \mapsto \widetilde{x}^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$ (так физики записывают умножение вектора (x^ν) на матрицу (a^μ_ν), здесь μ — номер строки, ν — номер столбца).

Аффинные преобразования $x^\mu \mapsto \widetilde{x}^\mu = a^\mu_\nu x^\nu + b^\mu$, где (a^μ_ν) из группы Лоренца, называются *преобразованиями Пуанкаре*.

Вектором называется любая величина, имеющая 4 компоненты координаты, A^μ, которая при переходе в другую систему координат преобразуется как вектор

$$A^\mu \mapsto \widetilde{A}^\mu = a^\mu_\nu A^\nu.$$

Ковектором называется величина B_μ, преобразующаяся по правилу

$$\widetilde{B}_\mu \mapsto B_\mu = a^\nu_\mu \widetilde{B}_\nu.$$

Ковектор — это на самом деле элемент двойственного пространства.

Величина, преобразующаяся как произведение координат, $A^{\mu\nu} \mapsto \mapsto \widetilde{A}^{\mu\nu} = a^\mu_{\mu_1} a^\nu_{\nu_1} A^{\mu_1\nu_1}$, называется 2-вектором или тензором типа $(2, 0)$.

Пример. Метрика $g_{\mu\nu}$ при преобразовании координат меняется следующим образом:

$$\widetilde{g}_{\mu\nu}\widetilde{x}^\mu\widetilde{x}^\nu = \widetilde{g}_{\mu\nu} a^\mu_{\mu_1} x^{\mu_1} a^\nu_{\nu_1} x^{\nu_1} = (\widetilde{g}_{\mu\nu} a^\mu_{\mu_1} a^\nu_{\nu_1}) x^{\mu_1} x^{\nu_1} = g_{\mu_1\nu_1} x^{\mu_1} x^{\nu_1},$$

следовательно, $g_{\mu_1\nu_1} = \widetilde{g}_{\mu\nu} a^\mu_{\mu_1} a^\nu_{\nu_1}$, и следовательно, $g_{\mu\nu}$ — 2-ковектор или тензор типа $(0, 2)$.

Обозначение $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ закреплено за стандартным антисимметрическим тензором ранга 4. Антисимметричность означает, что его компоненты меняют знак при перестановке любой пары индексов, кроме того, $\varepsilon_{0123} = 1$. *Рангом* называется число индексов тензора. В этих обозначениях форма объема равна $dV = \dfrac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\sigma$. *Дуальным тензором* называется тензор, свернутый с $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$.

Пример. Пусть $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ — антисимметричный тензор. Тогда $(*F)$ по определению равен: $F^*_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}$, где $F^{\lambda\sigma} = g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu} F_{\mu\nu}$ и $(g^{\lambda\mu}) = (g_{\mu\nu})^{-1}$.

Пусть (x^μ) и $(\widetilde{x}^\mu)$ — локальные координаты в точке и $\widetilde{x}^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$. Скалярное поле — это функция от x $\varphi(x) \mapsto \widetilde{\varphi}(\widetilde{x}) = \varphi(x)$. Векторное поле — это сечение касательного расслоения $A^\mu(x) \mapsto \widetilde{A}^\mu(\widetilde{x}) = = a^\mu_\nu A^\nu(x)$.

2. Лагранжева механика

Состояние классической системы, изменение ее во времени

В евклидовой системе координат положение частицы в системе определяется декартовыми координатами x^i_α, где $\alpha = 1, \ldots, N$ — номера