Пример 6. Релятивистская частица.

В этом случае траектория лежит в четырехмерном пространстве-времени $(ct, x^1, x^2, x^3) = x^\nu$. Траектории должны переходить в траектории при преобразованиях Лоренца. Для этого достаточно, чтобы действие было лоренц-инвариантно. Мы можем выбрать на кривой в качестве параметра t. Тогда простейшее лоренц-инвариантное действие имеет вид

$$S = m \int \sqrt{c^2\, dt^2 - d\vec{x}^2} = mc^2 \int \sqrt{1 - (dx^i/dt)^2/c^2}\, dt.$$

Легко доказать, что экстремали этого действия (на самом деле на этих траекториях достигается минимум) — прямые.

Итак, лагранжиан $L = -mc^2\sqrt{1-(\dot{x}/c)^2}$. Уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i}.$$

Так как $\dfrac{\partial L}{\partial x^i} = 0$, импульс $\vec{P} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \mathrm{const}$.

Энергия имеет вид $E = \dot{x}^i p_i - L = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. При малых v энергия равна $mc^2 + \dfrac{m\vec{v}^2}{2}$. Первое слагаемое в этой сумме $E = mc^2$ можно интерпретировать как внутреннюю энергию. А вектор $p^i = (E/c, \vec{p})$ является 4-вектором, т. е. величина $(p^i)^2 = m^2$ сохраняется при преобразованиях Лоренца.

Структура пространства-времени — это вопрос не геометрии, а физики. Фактически, это вопрос о группе инвариантности уравнений движения. Его нельзя решить без эксперимента.

3. Уравнения теории поля

Для возникновения теории поля имеются две причины. Первая причина состоит в том, что мы можем рассматривать системы с бесконечным числом степеней свободы. Система с конечным числом степеней свободы описывается обобщенными координатами $q_i(t)$ и обобщенными скоростями $\dot{q}_i(t)$. Если число координат становится континуальным, мы начинаем иметь дело с полем $\varphi(x,t)$, где непрерывная величина x играет роль индекса i.

Например, колеблющаяся струна состоит из очень большого, фактически бесконечного, числа атомов, непрерывно распределенных вдоль нее, и каждый из них совершает колебания. В этом случае x — номер (координата) атома, а $\varphi(x,t)$ — амплитуда его колебания в момент времени t.

Вторая причина — существование предельной скорости (c). Из-за этого энергия взаимодействия должна перемещаться между источником и объектом взаимодействия, т. е. где-то помещаться. Это «где-то» и есть поле.

Возмущение поля в некотором месте вызывает изменения поля в соседних точках, которые, в свою очередь, распространяются дальше. Так в течение конечного времени осуществляется дальнодействие.

Законы поля представляются уравнениями в частных производных.

В случае электромагнитного поля сила, действующая на точечную заряженную частицу, определяется полем непосредственно в этой точке, и, наоборот, присутствие заряженной частицы изменяет поле во всем пространстве.

Поле — одна из главнейших идей новой физики, наряду с релятивистским и квантовым принципами.

Пример. Струна.

Пусть $\varphi(x)$ — отклонение точки струны с координатой x. $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ — ускорение точки с координатой x. По закону Гука

$$\rho\Delta x\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=k[(\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))-(\varphi(x)-\varphi(x-\Delta x))].$$

Разделив на Δx и перейдя к пределу, получаем

$$\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\qquad \text{где } \lambda=\lim_{\Delta x\to 0}k\Delta x.$$

Это простейшее уравнение поля.

Мы хотим описать динамику поля с помощью принципа наименьшего действия. Действие имеет вид

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt.$$

Но в этом случае лагранжиан L — функция от $\varphi(x,t)$, $\dot{\varphi}(x,t)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$. В частности, в случае струны лагранжиан имеет вид

$$L = \int \rho \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \lambda \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Поэтому действие можно переписать в виде

$$A = \int \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_x)\,dx\,dt, \tag{1.2}$$

$\mathcal{L}$ называют *плотностью лагранжиана*; в случае струны она имеет вид

$$\mathcal{L} = \rho \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \lambda \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2.$$

Понятие вариации и экстремали легко можно обобщить на случай теории поля. В случае, если действие имеет вид (1.2), экстремали подчиняются следующему обобщению уравнения Эйлера—Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_x} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}.$$

В случае струны это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2\lambda\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0.$$

Мы видим, что это уравнение совпадает с уравнением струны при постоянных p и λ. Это значит, что решения уравнения струны действительно являются экстремалями нашего функционала действия.

Уравнения Максвелла также могут быть записаны в виде принципа наименьшего действия. Релятивистская инвариантность ограничивает вид рассматриваемых лагранжианов.

Существует общий *принцип инвариантности*: если мы хотим, чтобы экстремали были инвариантны относительно некоторой группы преобразований, достаточно, чтобы лагранжиан был инвариантен относительно этой группы.

Напишем простейший лоренц-инвариантный лагранжиан. Пусть $\varphi(x,t)$ — скаляр относительно преобразования Лоренца (это означает, что $\varphi'(x',t') = \varphi(x,t)$, если (x',t') получается из (x,t) преобразованием Пуанкаре). Пусть действие равно

$$S = \int \left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - m^2\varphi^2\right] dx\,dt.$$

Теорема. Действие S инвариантно относительно преобразований Лоренца, т. е. $S[\varphi] = S[\varphi']$.

Действительно, градиент $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}$ — вектор, сохраняющийся при преобразованиях Лоренца. Квадрат этого вектора $(\partial_\mu\varphi)^2 = \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$, а следовательно и $\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi)^2 - m^2\varphi^2$ — скаляр. Форма объема тоже лоренц-инвариантна. Уравнение для экстремалей этого действия:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - m^2\varphi = 0$$

также лоренц-инвариантно. Его называют *уравнением Клейна—Гордона*.

Пространственно-временные симметрии и тензор энергии-импульса

Если лагранжиан лоренц-инвариантен, то существует сохраняющийся тензор энергии-импульса, выражающийся через φ и его производные, причем:

1) $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$;

2) $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Пусть $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$ — лоренц-инвариантная плотность лагранжиана, зависящая от нескольких тензорных полей φ. Это значит, что действие

$$A[\varphi] = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)\, d^4x$$

инвариантно относительно преобразований $x \to x + \varepsilon$ при $\varepsilon = \mathrm{const}$ или $\varepsilon^\mu = \omega^{\mu\nu} x^\nu$. Рассмотрим вариацию функционала A при бесконечно малом преобразовании такого вида для произвольного ε. Она имеет вид

$$\delta A = \int \partial_\mu \varepsilon_\nu \cdot T^{\mu\nu}(x)\, d^4 x.$$

Это следует из того, что вариация должна быть линейна по ε и исчезать в случае $\partial_\mu \varepsilon_\nu = 0$ — постоянных ε.

Из лоренц-инвариантности следует, что $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Для уравнений движения

$$\delta A = \int \partial_\mu \varepsilon_\nu T^{\mu\nu}\, d^4 x = -\int \varepsilon_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu}\, d^4 x = 0.$$

Ввиду произвольности ε, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Пример 1. Если

$$S = \int [(\partial_\mu \varphi)^2 - m^2 \varphi^2]\, d^4 x,$$

то

$$T^{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \cdot \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} [(\partial_\mu \varphi)^2 - m^2 \varphi^2].$$

Пример 2. Если

$$S = \int (\partial_\mu \overline{\psi} \cdot \partial_\mu \psi - m^2 \overline{\psi} \psi)\, d^4 x,$$

то

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \overline{\psi} \cdot \partial_\nu \psi - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} L.$$

Электромагнетизм

Электрическое поле. К его открытию привели невинные опыты с эбонитовыми палочками, а также наблюдения и небезопасные эксперименты над грозными погодными явлениями. На современном языке сила, с которой действует электрическое поле, связана с напряженностью $\vec{E}$ следующей формулой:

$$\vec{F} = e\vec{E},$$

где e — заряд, $\vec{E}$ — электрическое поле.

Магнитное поле. Магнит в природе открыт давно. Компас изобретен китайцами более 1000 лет назад. Магнит действует на магнит и на проводник с током. Это значит, что поле магнита действует на движущийся электрический заряд. Это уже зародыш объединения электричества и магнетизма. В современной форме эти законы выражаются в форме закона Лоренца для силы $\vec{F} = \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]$. Итак, $\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]$.

Уравнения Максвелла

1) *Закон Гаусса.* Силовые линии электрического поля начинаются и кончаются на зарядах. Поток электрического поля через поверхность равен заряду внутри ее, т. е.

$$\int\limits_{\partial D} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q = 4\pi \int\limits_{D} \rho \, dv,$$

где ρ — плотность электрического заряда.

Раньше все законы записывались примерно в такой форме — в форме интегралов. Первое, что сделал Максвелл, — это переписал уравнения в дифференциальной форме, и их стало проще анализировать:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho.$$

2) *Отсутствие магнитных монополей.* Никто не мог отрезать у магнита полюс: отрежешь полюс, думаешь, остался только один — но нет, их опять два. Силовые линии магнитного поля нигде не начинаются и нигде не кончаются. Это значит, что отсутствуют магнитные монополи, т. е.

$$\int\limits_{\partial D} \vec{H} \, d\vec{S} = 0,$$

или, в дифференциальной форме,

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0.$$

3) *Индукция Фарадея — начало объединения*. Если магнит движется внутри замкнутого проводящего контура, то в контуре возникает ток. Циркуляция электрического поля равна

$$\oint\limits_{\partial\Gamma} \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Gamma} \vec{H}\,d\vec{S},$$

или, в дифференциальной форме,

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\vec{H}}{dt}.$$

4) *Закон Ампера* — ток создает циркуляцию магнитного поля:

$$\oint\limits_{\partial\Gamma} \vec{H}\,d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_{\Gamma} \vec{j}\,d\vec{S},$$

или, в дифференциальной форме,

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\cdot\vec{j}.$$

Максвелл заметил, что из закона Ампера следует, что заряд не может вытекать из области, что бывает не всегда, т. е.

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0$$

(это следует из того, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H} = 0$).

Закон Ампера был проверен в стационарном случае. Отличие должно проявляться в нестационарном случае. Максвелл добавил в закон Ампера еще один член, и получилось

$$\operatorname{rot}\vec{H} + \frac{1}{c}\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{4\pi}{c}\cdot\vec{j}.$$

Из уравнений Максвелла следует, что электрические и магнитные поля могут распространяться. Существуют электромагнитные волны. Оказалось, что скорость распространения этих волн совпадает со скоростью света. Именно из этого Максвелл сделал вывод о том, что свет имеет электромагнитную природу.

Лоренц-инвариантность уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразования Галилея. Лоренц (до открытия Эйнштейном теории относительности) обнаружил формальную инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований

$$x \to \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t \to \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Если одновременно преобразовывать $\vec{E}$ и $\vec{H}$ следующим образом:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y + H_z v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z - H_y v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$H'_x = H_x, \quad H'_y = \frac{H_y - E_z v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad H'_z = \frac{H_z + E_y v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

то форма уравнений Максвелла сохранится.

Эта симметрия делается более очевидной, если переписать уравнения Максвелла в четырехмерных обозначениях:

$$\partial_0 = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$
$$F_{0i} = E_i; \quad F_{ik} = -\varepsilon_{ikl} H_l; \quad j = (c\rho, \vec{j}).$$

Уравнения Максвелла делятся на две пары. Первая пара — это второе и третье уравнения, которые не зависят от зарядов и токов, вторая — первое и четвертое уравнения, которые зависят.

$$\begin{gathered} \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\tfrac{4\pi}{c} j^\nu. \end{gathered} \tag{1.3}$$

В этой записи инвариантность очевидна, если считать $F_{\mu\nu}$ тензором, а j^μ — вектором по отношению к преобразованиям Лоренца.

Векторный потенциал, калибровочная инвариантность

Попробуем решить первую пару уравнений Максвелла, т. е. первое уравнение из (1.3).

Если A_μ — векторное поле, то

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

удовлетворяет первой паре уравнений Максвелла. Верно и обратное: если $F_{\mu\nu}$ удовлетворяет первому уравнению из системы (1.3), то существует векторное поле A_μ такое, что $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Представление $F_{\mu\nu}$ в форме $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ не единственно. Действительно, если $\widetilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$, то $\widetilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$.

Трехмерная запись электромагнитного поля через векторный потенциал:

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}; \quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \text{где } \varphi = A_0.$$

Попробуем найти лагранжиан для заряженной релятивистской частицы в электромагнитном поле. Сначала предположим, что электромагнитное поле дано, т. е. оно не зависит от заряженных частиц.

Нам надо найти такое $S[x^\mu(\tau), A_\mu(x)]$, чтобы уравнение $\delta S = 0$ было эквивалентно

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}].$$

Очевидно, действие должно быть лоренц-инвариантно и калибровочно-инвариантно. Рассмотрим действие вида

$$S = -mc\int ds - \frac{e}{c}\int A_\mu\, dx^\mu,$$

где интегралы берутся вдоль траектории. Первое слагаемое — действие для свободной частицы. Лоренц-симметрия очевидна. Видно также, что действия для A_μ и $A_\mu + \partial_\mu f$ отличаются на константу $f(b) - f(a)$, а значит, экстремали этих действий совпадают.

Легко проверить, что уравнения движения можно вывести, исходя из вариационного принципа $\delta S = 0$.

Замечательным обстоятельством является то, что такая вспомогательная, казалось бы, вещь, как $A_\mu(x)$, позволяет написать простое выражение для действия. Выражения для действия, использующие $F_{\mu\nu}$, очень сложны и некрасивы. Это *сигнал*, указывающий на фундаментальное значение векторного потенциала, которое окончательно выявляется в квантовой механике.

Электромагнитные волны. Волновое уравнение

Уравнения Максвелла в пустоте имеют вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}; & \operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{H} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}; & \operatorname{div}\vec{E} = 0. \end{cases}$$

Оказывается, эти уравнения могут иметь отличные от нуля решения, меняющиеся со временем. Это говорит о том, что электромагнитные волны могут распространяться, даже когда нет зарядов и токов.

Выразим $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через векторный потенциал $A_\mu = (A_0, \vec{A})$. Выбор векторного потенциала неоднозначен, поэтому мы можем наложить на него дополнительное условие, с тем чтобы избавиться от произвола и упростить решения. Такие условия называются *выбором калибровки*.

Выберем калибровку $A_0 = 0$. В этой калибровке

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Выражения для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через векторный потенциал, разумеется, автоматически удовлетворяют первой паре уравнений Максвелла. Подставим эти выражения во вторую пару:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = -\Delta\vec{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}.$$

Несмотря на выбор калибровки $A_0 = 0$, мы можем делать дополнительные калибровочные преобразования $\vec{A} = \vec{A} + \operatorname{grad} f$, если f не изменяется во времени. Из уравнения $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ следует, что $\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = 0$. Поэтому мы можем выбрать f так, чтобы $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. В этом случае $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = -\Delta\vec{A}$ и уравнения Максвелла принимают вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = 0. \tag{1.4}$$

Это и есть волновое уравнение.

Другой вывод. Уравнения Максвелла в пустоте имеют вид $\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$, где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Поэтому
$$\partial_\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A_\mu = 0.$$

Выберем калибровочное условие $\partial_\mu A_\mu = 0$. Такой выбор называют *калибровкой Лоренца*, это условие слабее, чем предыдущее. Получаем $\partial_\mu \partial_\mu A_\nu = 0$, т. е. $\Delta A_\nu = 0$.

Вернемся обратно в калибровку $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ и $A_0 = 0$. Рассмотрим частный случай, когда A_μ зависит лишь от x и t. Для каждой из компонент уравнение (1.4) имеет вид
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$
т. е.
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0.$$

Отсюда видно, что решения (1.4) имеют вид
$$f(t,x) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right). \tag{1.5}$$

Первое слагаемое в (1.5) — это плоская волна, бегущая со скоростью c в положительном направлении оси x: то, что находится в данный момент в данной точке, через время Δt сдвинется на расстояние $c\Delta t$ по оси x. Второе слагаемое — плоская волна, бегущая в другую сторону.

Так как A не зависит от y и z, т. е. $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial A}{\partial z} = 0$, то из $\operatorname{div} A = 0$ следует, что $\dfrac{\partial A_x}{\partial x} = 0$. Тогда из уравнения следует, что $\dfrac{\partial A_x}{\partial t} = 0$; т. е. $A_x = \mathrm{const}$ — постоянное электрическое поле вдоль оси x. Будем считать, что этого поля нет, и что $A_x = 0$. Тогда $\vec{A}$ перпендикулярно оси x и
$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} = [\nabla, \vec{A}] = -\frac{1}{c}\left[\vec{n}, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right] = -\frac{1}{c}[\vec{n}, \vec{E}],$$
так как $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}\,\vec{n} - tc)$, где $\vec{n}$ — единичный вектор вдоль оси x. Таким образом, в плоской волне $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны.

Поток энергии электромагнитной волны равен

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} \cdot E^2\vec{n} = \frac{c}{4\pi} \cdot H^2\vec{n};$$

Плотность энергии электромагнитного поля равна

$$W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}.$$

Здесь (W, S_1, S_2, S_3) — четыре компоненты тензора энергии импульса $T_{\mu\nu}$ для электромагнитного поля, а именно, $W = T_{00}$, $S_i = T_{i0}$.

Непосредственно из уравнений Максвелла можно вывести, что $\dfrac{\partial W}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{S}$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D W = \int\limits_{\partial D} \vec{S}\, d\vec{s}.$$

Частный случай плоской волны — монохроматическая волна:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{A}, \quad \text{и, следовательно,} \quad \Delta\vec{A} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{A} = 0.$$

Решения этого уравнения имеют вид $\vec{A} = \operatorname{Re} \vec{A}_0 e^{-i\omega(t-x/c)}$, где $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$ — длина волны, $\vec{k} = \dfrac{\omega}{c}\vec{n}$ — волновой вектор. Если вектор $\vec{n}$ не сонаправлен оси x, то решение имеет вид $\vec{A} = \operatorname{Re} \vec{A}_0 e^{-i\omega(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$.

Запаздывающие потенциалы (потенциалы Лиенара–Вихерта)

Мы разобрались с электромагнитными волнами в пустоте. Теперь посмотрим, как волны излучаются потенциалами.

Сначала рассмотрим случай, когда заряды и токи не зависят от времени.

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \text{следовательно,} \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Функцию φ называют скалярным потенциалом. Из этих уравнений следует уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{1.6}$$

Сначала найдем решение для точечного заряда, расположенного в начале координат; общее решение мы можем найти по линейности.

Из соображений симметрии ясно, что $\vec{E}$ должно быть направлено по радиусу, и что $|\vec{E}|$ зависит лишь от R. Тогда из равенства $\int \vec{E}\, d\vec{s} = 4\pi Q$ следует, что $E \cdot 4\pi R^2 = 4\pi Q$.

Уравнение $|\vec{E}| = Q/R^2$ или $\vec{E} = Q\vec{R}/R^3$ — это закон Кулона и $\varphi = Q/R$. Из (1.6) и последней формулы следует, что $\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta^3(\vec{R})$. Если зарядов много, то $\varphi = \sum \frac{e_\alpha}{R_\alpha}$ или $\varphi = \sum \frac{e_\alpha}{|\vec{R} - \vec{r}_\alpha|}$, где R_α — расстояние от заряда e_α до наблюдателя, $\vec{R}$ — координаты наблюдателя, $\vec{r}_\alpha$ — координаты заряда e_α. В случае непрерывного распределения

$$\varphi(\vec{R}) = \int \frac{\rho(\vec{r})\, d\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{R}|}.$$

Для статических токов формулы аналогичные.

Теперь пусть заряды меняются со временем. Тогда в калибровке $\partial_\mu A_\mu = 0$ уравнения выглядят так:

$$\Delta A_\mu = \frac{4\pi}{c} j_\mu$$

или

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{dt^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j},$$
$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{4\pi}{c}\rho.$$

Как и в статическом случае, разобьем пространство на маленькие объемчики. Плотность заряда $\rho = e(t)\delta(\vec{R})$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{4\pi}{c} e(t)\delta(\vec{R})$$

и везде, кроме начала координат,

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{dt^2} = 0.$$

Из симметричности следует, что φ зависит лишь от R. Переписав Δ в сферических координатах, получаем

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}) - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Подставим $\varphi = \frac{\chi(R,t)}{R}$. Тогда $\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\chi}{dt^2} = 0$, т. е.

$$\chi = f_1(t - R/c) + f_2(t + R/c).$$

Рассмотрим частное решение вида $\varphi = \frac{\chi(t - R/c)}{R}$ и найдем φ в начале координат. Устремляя $R \to 0$ и отбрасывая член $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$, не содержащий больших производных по R, получаем при $R \to 0$, что $\Delta\varphi = -\frac{4\pi}{c}e(t)\delta(\vec{R})$. Это уравнение мы уже решали: $\varphi = \frac{e(t - R/c)}{R}$. Физический смысл этого — потенциал создается зарядом в момент времени на $\frac{R}{c}$ раньше текущего. Окончательный ответ:

$$\varphi(\vec{R}) = \int \frac{\rho(\vec{r}, t - R/c)}{R}\, d^3r = \int \frac{\rho(\vec{r}, t - |\vec{R} - \vec{r}\,|/c)}{|\vec{R} - \vec{r}\,|}\, d^3r.$$

Аналогично

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}, t - |\vec{R} - \vec{r}\,|/c)}{|\vec{R} - \vec{r}\,|}\, d^3r.$$

Эти формулы называются формулами *запаздывающих потенциалов* или *потенциалов Лиенара—Вихерта*.

Теперь разберемся, как излучаются волны. Пусть имеется система зарядов и токов в некотором шаре диаметра l, и мы смотрим на электромагнитное поле на расстоянии $R_0 \gg l$. В этой области

$$|\vec{R} - \vec{r}\,| \approx R - \vec{n}\vec{r},$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный к нам. На больших расстояниях мы можем пренебречь членом $\vec{n}\vec{r}$ в знаменателе:

$$\vec{A} = \frac{1}{cR}\int \vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c} - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}\right)\, d^3r.$$

Более того, членом $\dfrac{\vec{r}\vec{n}}{c}$ также можно пренебречь, если $l \ll cT$, где T — характерное время изменения токов.

$$j\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c} - \frac{\vec{r}\,\vec{n}}{c}\right) \approx j\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c}\right),$$

$$\vec{A} = \frac{1}{cR}\int \vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c}\right) d^3 r.$$

Отсюда видно, что если R существенно больше l и длины волны $\lambda = cT$, т. е. если волны можно считать плоскими, то не только потенциал убывает как $\dfrac{1}{R}$, но и $\vec{H} = \mathrm{rot}\ \vec{A} = \dfrac{[\vec{A}, \vec{n}]}{c}$ и $\vec{E} = [\vec{n}, \vec{H}]$ убывают, как $\dfrac{1}{R}$. Поэтому поток энергии $[\vec{E}, \vec{H}]$ пропорционален $\dfrac{1}{R^2}$ и полный поток энергии через каждую сферу, окружающую систему зарядов, остается постоянным. Другими словами, энергия действительно уходит. В случае статических зарядов $\vec{H} = 0$ и потока энергии нет.

Реальность векторного потенциала в квантовой механике

В квантовой механике вероятность того, что частица перейдет из одной точки в другую, равна $|A|^2$, где A — амплитуда вероятности:

$$A = \sum e^{-iS/\hbar},$$

а сумма берется по всем возможным путям, S — действие, в которое, как мы видели, входит векторный потенциал.

Пусть у нас есть источник электронов, пролетающих через экран с двумя щелями. Наблюдается интерференционная картина. Минимум или максимум находятся в данной точке интерференционной картины — зависит от разности фаз. Рассмотрим соленоид бесконечной длины. Если по обмотке идет ток, то внутри соленоида возникает магнитное поле, но снаружи этого не происходит. Несмотря на это, если мы поместим соленоид между двумя пучками, туда, где не могут пролетать электроны, и включим ток, интерференционная картина сместится. Это происходит, потому что в силу $H = \mathrm{rot}\, A$ там, где пролетают электроны, изменяется векторный потенциал A (хотя и отсутствует H), а значит, изменяется и значение S. Этот якобы вспомогательный объект — векторный потенциал — является вполне физическим, и частицы с ним взаимодействуют.

Геометрия и калибровочные поля

Описание электромагнитных явлений приводит естественным образом к тензору напряженности $F_{\mu\nu}$ и векторному потенциалу A_μ. Оказывается, эти величины имеют замечательный геометрический смысл. Выявление этого смысла ведет к интересным и важным обобщениям.

Векторный потенциал $A_\mu(x)$ — это векторное поле. Физику определяет A_μ по модулю калибровочных преобразований $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$. Пусть $\psi(x)$ — комплексное поле. Рассмотрим действие группы $\mathrm{U}(1)^\infty = \prod \mathrm{U}_x(1)$ (произведения групп $U(1)$ в каждой точке) на полях $\psi(x)$, определенное формулой

$$\psi(x) \mapsto e^{if(x)}\psi(x).$$

Таким образом, в каждой точке мы имеем одномерное комплексное (или двумерное вещественное) представление группы $\mathrm{U}(1)$ (или $\mathrm{O}(2)$: $\psi = \psi_1 + i\psi_2$). Разность $\psi(y) - \psi(x)$ не является «правильным» объектом, ибо не преобразуется по представлению нашей (калибровочной) группы. Аналогично производная $\partial_\mu\psi$ не является правильным объектом. Чтобы обойти это, мы введем векторное поле $A_\mu(x)$, преобразующееся под действием нашего представления по формуле $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$, и с его помощью определим параллельный перенос $\psi(x)$ в точку y по кривой C, соединяющей x и y:

$$\psi(x \to y, C) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\int_c A_\mu\, dx^\mu}\psi(x).$$

Видно, что $\psi(x \to y, C)$ преобразуется так же, как и $\psi(y)$. Поэтому и $\psi(y) - \psi(x \to y, C)$ — правильный объект.

Если $y^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu$, то

$$\psi(x + \Delta x) - \psi(x \to x + \Delta x) = (\nabla_\mu\psi)\Delta x^\mu,$$

где

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - iA_\mu.$$

∇_μ называют *ковариантной производной*. Очевидно, что ∇_μ — вектор, как и ∂_μ, и при калибровочном преобразовании

$$\nabla_\mu\psi \to e^{if(x)}\nabla_\mu\psi.$$

Математические названия. Функция $\psi(x)$ называется *сечением расслоения*, $\mathrm{U}(1)$ — это *структурная группа* этого расслоения, A_μ — *связность*.

Мы определили параллельный перенос с помощью кривой C, соединяющей точки x и y. Зависит ли перенос от контура C?

Это определяется тем, равен ли 0 интеграл по замкнутому контуру $\oint A_\mu\, dx^\mu$. Этот интеграл сводится к сумме интегралов по маленьким контурам

$$\oint\limits_{\Delta S} A_\mu\, dx^\mu = F_{\mu\nu}\Delta S^{\mu\nu},$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$.

Параллельный перенос не зависит от пути, если $F_{\mu\nu} = 0$. Такое расслоение называется *плоским*, а величина $F_{\mu\nu}$ — *кривизной* связности A_μ.

Получаем, что тензор напряженности электромагнитного поля является кривизной.

Все, о чем говорилось только что, допускает обобщение на случай неабелевой калибровочной группы. Вместо скалярного поля $\psi(x)$ рассмотрим теперь векторное поле $\psi^i(x)$. Пусть U — некоторая группа G матриц $N \times N$, A_μ — матричнозначные функции $A_\mu^{ik}(x)$ со значениями в алгебре Ли группы U, причем при замене координаты x на y

$$A_\mu \to A'_\mu, \qquad A'_\mu(y) = A_\nu(x)\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}.$$

A_μ — это калибровочное поле или связность в линейном расслоении со структурной группой G.

Определим перенос из точки x в точку y по контуру C следующей формулой

$$\psi(x \to y, C) = \prod(1 + A_\mu\, dx^\mu).$$

Мы разбиваем кривую C на много маленьких кусочков и берем упорядоченное произведение значений на каждом кусочке:

$$\psi(x \to x + \Delta x) = (1 + A_\mu \Delta x^\mu)\psi(x).$$

При замене $\psi(x)$ на $g(x)\psi(x)$ связность преобразуется по следующей формуле:

$$A_\mu \to g A_\mu g^{-1} - (\partial_\mu g)\cdot g^{-1}.$$

По определению ковариантная производная равна

$$\nabla\psi = (\partial_\mu + A_\mu)\psi.$$

Теорема. Если $\psi(x) \to g(x)\psi(x)$, $A_\mu \to gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g \cdot g^{-1}$ то $\nabla_\mu\psi \to g\nabla_\mu\psi$.

Теорема. Определим кривизну $F_{\mu\nu}\psi = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi$. Тогда

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

В абелевом случае последний член, естественно, исчезает.

Историческое отступление

Это обобщение было придумано Янгом и Миллсом в 1954 году, по-видимому, из чисто эстетических соображений. В том же году Ландау и его сотрудники провозгласили *«теорему» о нуле заряда* (московский нуль), в которую все поверили и из которой следовало, что квантовая теория поля не может описывать взаимодействие элементарных частиц. Это убеждение просуществовало 20 лет (на протяжении которых почти никто квантовой теорией поля не занимался), которые понадобились для построения квантовой теории неабелевых калибровочных полей, после чего «теорема» о нуле заряда была проверена для этого случая и не подтвердилась. После этого квантовая теория поля была реабилитирована.

Уравнения Максвелла. Обобщение на неабелев случай

Ранее мы ввели четырехмерный тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

и вектор тока $j^\mu = (c\rho, j_1, j_2, j_3)$. Теперь уравнения Максвелла могут быть записаны так:

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0,$$
$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j_\nu.$$

Напомним, что греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3,

$$\partial_0 = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Очевидно, эти уравнения обладают лоренц-инвариантностью, так как если тензор равен 0 в одной системе координат, то он равен 0 и в другой системе координат.

Первую пару уравнений Максвелла можно решить:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Векторный потенциал A_μ при этом определяется не однозначно, а с точностью до калибровочных преобразований

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f.$$

Эта ситуация является частным случаем расслоения со связностью.

Рассмотрим функцию ψ на пространстве Минковского со значениями в некотором N-мерном пространстве, или, другими словами, N функций $\psi^1(x), \ldots, \psi^N(x)$. Возьмем матричную группу G и функцию $g(x)$ со значениями в G. Калибровочное преобразование

$$g(x)\colon \psi(x) \to g(x)\psi(x) \quad (\psi^i(x) \to g^i_k(x)\psi^k(x))$$

(ψ на самом деле не функция, а сечение расслоения).

Функция $\partial_\mu\psi$ этим свойством не обладает, т. е. при замене $\psi(x)$ на $g(x)\psi(x)$ $\partial_\mu\psi(x)$ переходит не в $g(x)\partial_\mu\psi(x)$. Чтобы исправить это, вместо производной ∂_μ введем ковариантную производную $\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ (т. е. $(\nabla_\mu\psi)^i = (\partial_\mu\psi^i) + (A_\mu)^i_k\psi^k$). Мы хотим, чтобы при замене $\psi(x)$ на $g(x)\psi(x)$ $\nabla_\mu\psi(x)$ переходило в $g(x)\nabla_\mu\psi(x)$. Для этого необходимо, чтобы A_μ переходило в $gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g \cdot g^{-1}$. Докажем это:

$$(\partial_\mu + gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g \cdot g^{-1})g\psi = \partial_\mu(g\psi) + gA_\mu\psi - \partial_\mu g \cdot \psi =$$
$$= \partial_\mu g \cdot \psi + g \cdot \partial_\mu\psi + gA_\mu\psi - \partial_\mu g \cdot \psi = g(\partial_\mu + A_\mu)\psi = g\nabla_\mu\psi.$$

В случае, если g — унитарная матрица 1×1, т. е. комплексное число, равное 1 по модулю, ($g(x) = e^{if(x)}$), получается $A_\mu \to A_\mu - i\partial_\mu f$.

С помощью связности определяется параллельный перенос

$$\psi(x \to x + dx) = (1 + A_\mu\, dx^\mu)\psi(x).$$

Это выражение преобразуется так же, как и $\psi(x + dx)$. Поэтому их можно вычитать, преобразуя ковариантную производную. С помощью этой формулы можно переносить по кривым, разбивая их на маленькие кусочки. (Параллельный перенос $\psi(x)$ по кривой является решением дифференциального уравнения $\nabla_v\psi = 0$, где v — касательный вектор к кривой.)

В общем случае результат параллельного переноса зависит от пути. Перенос не зависит от пути, если $F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = 0$. В этом случае связность называют *плоской*. Вычислим $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu\nabla_\nu\psi &= (\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu + A_\nu)\psi = \\
&= \partial_\mu\partial_\nu\psi + A_\mu\partial_\nu\psi + \partial_\mu(A_\nu\psi) + A_\mu A_\nu\psi, \\
\nabla_\nu\nabla_\mu\psi &= \partial_\nu\partial_\mu\psi + A_\nu\partial_\mu\psi + \partial_\nu(A_\mu\psi) + A_\nu A_\mu\psi, \\
\partial_\mu(A_\nu\psi) &= (\partial_\mu A_\nu)\psi + A_\nu(\partial_\mu\psi), \\
\partial_\nu(A_\mu\psi) &= (\partial_\nu A_\mu)\psi + A_\mu(\partial_\nu\psi), \\
(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)\psi &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu])\psi.
\end{aligned}$$

Связность называют *тривиальной*, если ее можно калибровочным преобразованием привести к виду $A_\mu \equiv 0$.

Связность является тривиальной, если $A_\mu = -\partial_\mu g \cdot g^{-1}$.

Действие электромагнитного поля

Есть уравнения двух сортов: первые описывают, как ведут себя частицы, вторые — как развиваются сами электромагнитные поля, например, уравнение Лоренца $\vec{F} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{H}]$ и уравнения Максвелла.

До сих пор выражением для действия частицы в электромагнитном поле было

$S = S_x + S_{x,A}$, где $S_x = mc\int ds$, $S_{x,A} = -\frac{e}{c}\int A_\mu\, dx^\mu$, здесь A_μ — заданная функция координат.

Уравнение $\delta S = 0$ эквивалентно уравнению Лоренца.

Теперь мы хотим найти вид S_A так, чтобы вариация $S = S_x + S_{x,A} + S_A$ по A_μ приводила к уравнениям Максвелла. Ответ есть

$$S_A(A) = -\frac{1}{16c\pi}\int F_{\mu\nu}^2\, d^4x.$$

Если бы мы рассматривали S как функционал от $F_{\mu\nu}$, $\delta S = 0$ означало бы, что $F_{\mu\nu} = 0$. Но мы должны помнить, что на самом деле $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ и независимые переменные — A_μ.

$$\delta S_A = -\frac{1}{8c\pi}\int F_{\mu\nu}\,\delta F_{\mu\nu} = -\frac{1}{8c\pi}\int F_{\mu\nu}(\partial_\mu\,\delta A_\nu - \partial_\nu\,\delta A_\mu) =$$
$$= -\frac{1}{4c\pi}\int F_{\mu\nu}\partial_\mu\,\delta A_\nu = \frac{1}{4c\pi}\int \partial_\mu F_{\mu\nu}\,\delta A_\nu = 0.$$

Итак, уравнение $\delta S_A = 0$ эквивалентно уравнению $\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$, т. е. левой части второй пары уравнений Максвелла. Правая часть второй пары уравнений Максвелла получается, если проварьировать $S_{x,A}$ по A ($\delta S = \delta S_x + \delta S_{x,A} + \delta S_A$, $S_{x,A} = -\frac{e}{c}\int A_\mu\,dx^4$ переходит в $-\frac{1}{c^2}\int A_\mu j^\mu\,dx^4$). Первая пара уравнений Максвелла автоматически выполняется, так как мы считаем, что $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Расширение группы симметрий

Уравнения Максвелла в вакууме имеют более широкую группу симметрий, чем группа Пуанкаре. Это группа *конформных преобразований*, т. е. группа преобразований, сохраняющих углы, или группа преобразований $x^\mu \to y^\mu(x)$, для которых $(dy^\mu)^2 = \rho(x)(dx^\mu)^2$. Группа конформных преобразований содержит группу Пуанкаре, растяжения $x^\mu \to \lambda x^\mu$ и инверсию $x^\mu \to y^\mu = \frac{x^\mu}{\sum(x^\mu)^2}$, и эти преобразования порождают всю группу конформных преобразований. Группа конформных преобразований изоморфна $\mathrm{O}(4,2)$.

Поля Янга–Миллса

Формула действия для электромагнитного поля прямо обобщается на неабелев случай.

Рассмотрим форму кривизны $F_{\mu\nu}$. Это 2-форма с коэффициентами в алгебре Ли группы G, т. е. при каждом значении μ и ν величина $F_{\mu\nu}$ — это матрица $N \times N$ из алгебры Ли группы G, $F_{\mu\nu}^2$ — также матрица $N \times N$. У этой матрицы есть след $\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}^2$, который называется *формой Киллинга*.

Положим $S = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}^2\, d^4x$. Связности $A_\mu(x)$, минимизирующие данное действие, называют полями Янга–Миллса.

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}\nabla_\mu \delta A_\nu\, d^4x,$$

где $\nabla_\mu a = \partial_\mu a + [A_\mu, a]$.

$\delta S = 0$ означает, что

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu} = 0. \tag{1.7}$$

Кроме того, всегда выполняются уравнения

$$\nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \tag{1.8}$$

которые называются *тождеством Бьянки*.

Уравнения (1.7) и (1.8) называются *уравнениями Янга–Миллса*, это нелинейные уравнения.

Топология пространства калибровочных полей с конечным действием

Будем считать пространство евклидовым и четырехмерным. Рассмотрим решения уравнений Янга–Миллса A_μ, для которых $S[A] < \infty$. Для этого достаточно, чтобы $F_{\mu\nu} = o\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ при $|x| \to \infty$ или $A_\mu = \partial_\mu g \cdot g^{-1} + o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ при $|x| \to \infty$.

Из условия $F_{\mu\nu} = 0$ следует, что $A_\mu = (\partial_\mu g)\cdot g^{-1}$.

Так как $A_\mu = \partial_\mu g \cdot g^{-1} + o\left(\frac{1}{|x|}\right)$, то при больших $|x| \gg 1$ получаем отображение $g\colon S^3 \to G$. Рассмотрим группу $G = \mathrm{SU}(2)$. $\mathrm{SU}(2) \simeq S^3$. Любое непрерывное отображение $g\colon S^3 \to S^3$ с точностью до гомотопической эквивалентности характеризуется целым числом $k \in \mathbb{Z} = \pi_3(S^3)$, совпадающим со степенью этого отображения.

В случае $G = \mathrm{SU}(2)$ любой элемент $g \in G$ — это 2×2 матрица, удовлетворяющая условию $g^+ g = \mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ — единичная матрица.

Любую такую матрицу g можно представить как сумму $g = n^0\mathbb{1} + \sum\limits_{k=1}^{3} n^k\sigma_k$, где σ_k — матрицы Паули, с условием $\sum\limits_{\mu}(n^\mu)^2 = 1$ (напомним, что $n^\mu = n^\mu(x)$, функции точек нашего пространства $\mathbb{R}^4$).

Степень отображения g можно вычислить, проинтегрировав якобиан отображения.

Пример. Рассмотрим отображение $v\colon S^1_1 \to S^1_2$. Пусть на $S^1_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ угловая координата α, а на $S^1_2 = \{(y_1, y_2) \mid y_1^2 + y_2^2 = R^2\}$ угловая координата φ. Тогда $2\pi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \int\limits_{S^1_2} \frac{-y_2\,dy_1 + y_1\,dy_2}{y_1^2 + y_2^2}$, но

$$\deg v = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{d\alpha} d\alpha =$$
$$= \frac{1}{2\pi R^2}\int\limits_{S^1_1} -y_2(\partial_1 y_1\,dx_1 + \partial_2 y_1\,dx_2) + y_1(\partial_1 y_2\,dx_1 + \partial_2 y_2\,dx_2) =$$
$$= \frac{1}{2\pi R^2}\int\limits_{S^1_1} y_a\partial_\mu y_b\,dx^\mu\varepsilon^{ab} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^1_1} \varepsilon^{ab} y_a\partial_\mu y_b\,dx^\mu$$

(в случае $R = 1$).

Пусть $g\colon S^3 \to \mathrm{SU}(2) \simeq S^3$. Обе сферы вложены в $\mathbb{R}^4$. Будем, как и в примере, считать, что координаты в прообразе $(x^0, \ldots, x^3)$, а в образе — $(n^0, \ldots, n^3)$, $\sum(n^\mu)^2 = 1$.

Определим следующие дифференциальные формы:

$$\omega = \frac{1}{2}\, d\left(\sum(n^\mu)^2\right) = n^\mu\,dn^\mu,$$
$$\Omega = \sum_{\mu=0}^{3}(-1)^{\mu-1} n^\mu\,dn^0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dn^\mu} \wedge \ldots \wedge dn^3$$

(во второй формуле в каждом слагаемом один дифференциал dn^k пропущен).

Тогда

$$\omega \wedge \Omega = dn^0 \wedge dn^1 \wedge dn^2 \wedge dn^3. \tag{1.9}$$

Физики записывают форму Ω так:

$$\Omega = \frac{1}{6}\varepsilon_{abcd} n^a\, dn^b \wedge dn^c \wedge dn^d = d\tau,$$

$$g^*(\Omega) = \frac{1}{6}\varepsilon_{abcd} n^a (\partial_\mu n^b\, dx^\mu) \wedge (\partial_\nu n^c\, dx^\nu) \wedge (\partial_\lambda n^d\, dx^\lambda) =$$

$$= \frac{1}{6}\varepsilon_{abcd} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda,$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda = ds^{\mu\nu\lambda}.$$

Степень отображения g, как и в примере, задается интегралом

$$q = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{S^3} d\tau = \frac{1}{12\pi^2}\int\limits_{S^3} \varepsilon_{abcd} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d\, ds^{\mu\nu\lambda}. \tag{1.10}$$

Теорема. Выполнено следующее соотношение

$$\varepsilon_{abcd} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\partial_\mu g \cdot g^{-1})(\partial_\nu g \cdot g^{-1})(\partial_\lambda g \cdot g^{-1}). \tag{1.11}$$

Поскольку правая и левая части равенства (1.11) $\mathrm{SU}(2)$-инвариантны, то достаточно доказать равенство в единице группы $\mathrm{SU}(2)$.

При $g = e$ $\;n^0 = 1$, $n^1 = n^2 = n^3 = 0$. Кроме того, $\sum (n^\mu)^2 = 1$, следовательно, $\partial_\mu n^0 = 0$. Доказываемое равенство будет выглядеть так:

$$\varepsilon_{abcd} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d = \varepsilon_{bcd} \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\partial_\mu g)(\partial_\nu g)(\partial_\lambda g),$$

где $\partial_\mu g = \partial_\mu n^1 \sigma_1 + \partial_\mu n^2 \sigma_2 + \partial_\mu n^3 \sigma_3$, которое проверяется прямым вычислением.

Замечание. Мы рассматриваем след, поэтому в правой части нас интересует только коэффициент при $\mathbb{1}$.

Очевидно, что поля A_μ, асимптотики которых равны различным q, не могут быть продеформированы одно в другое.

Существует замечательное представление q через $F_{\mu\nu}$.

Теорема. Если $A_\mu = \partial_\mu g \cdot g^{-1} + o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ при $|x| \to \infty$, то $q = \frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{Tr}\int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}\,d^4x$, где $F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}$.

Сначала покажем, что $\mathrm{Tr}\int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}\,d^4x = \mathrm{const}$ при варьировании A_ν. Действительно,

$$\delta\left(\mathrm{Tr}\int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}\,d^4x\right) = \delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\,\mathrm{Tr}\int F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}\,d^4x\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\int F_{\mu\nu}\delta F_{\lambda\sigma}\,d^4x =$$

$$= \mathrm{Tr}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\int F_{\mu\nu}(\nabla_\lambda\delta A_\sigma - \nabla_\sigma\delta A_\lambda)\,d^4x =$$

$$= 2\,\mathrm{Tr}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\int F_{\mu\nu}\nabla_\lambda\delta A_\sigma\,d^4x =$$

$$= 2\,\mathrm{Tr}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\int_{S^3(R)} F_{\mu\nu}\delta A_\sigma\,d\tau^\lambda - 2\,\mathrm{Tr}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\int_{\mathbb{R}^4}(\nabla_\lambda F_{\mu\nu})\delta A_\sigma\,d^4x = 0.$$

В последнем выражении граничный член представляет из себя интеграл по $S^3(R)$ от функции, равной $o\left(\frac{1}{|x|^2}\right)\cdot o\left(\frac{1}{|x|}\right) = o\left(\frac{1}{|x|^3}\right)$ при $|x| = R \to \infty$ и поэтому стремится к нулю при $|x| \to \infty$. Равенство нулю последнего члена эквивалентно тождеству Бьянки

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

Следовательно, $\int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}\,d^4x$ не меняется при непрерывных изменениях A_μ.

Кроме того, верно равенство

$$\nabla_\mu F^*_{\mu\nu} = 0. \qquad (1.12)$$

Действительно,

$$\nabla_\mu F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu F_{\alpha\beta} + [A_\mu, F_{\alpha\beta}]\},$$
$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha.$$

Из-за кососимметричности $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) = 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\nabla_\mu F^*_{\mu\nu} &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) + A_\mu(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) - \\ &\quad - (\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta)A_\mu\} = \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + \partial_\mu A_\alpha \cdot A_\beta + A_\alpha\partial_\mu A_\beta + A_\mu\partial_\alpha A_\beta + A_\mu A_\alpha A_\beta - \\ &\quad - \partial_\alpha A_\beta \cdot A_\mu - A_\alpha A_\beta A_\mu\} = \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + (\partial_\mu A_\alpha \cdot A_\beta - \partial_\alpha A_\beta \cdot A_\mu) + \\ &\quad + (A_\alpha\partial_\mu A_\beta + A_\mu\partial_\alpha A_\beta) + (A_\mu A_\alpha A_\beta - A_\alpha A_\beta A_\mu)\} = 0\end{aligned}$$

из-за кососимметричности $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}) &= \mathrm{Tr}\left\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F^*_{\mu\nu} + (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)F^*_{\mu\nu}\right\} = \\ &= \mathrm{Tr}\left\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F^*_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu F^*_{\mu\nu} - A_\mu F^*_{\mu\nu}A_\nu\right\} = \\ &= \mathrm{Tr}\left\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F^*_{\mu\nu} + A_\mu[A_\nu, F^*_{\mu\nu}]\right\}.\end{aligned}$$

Здесь, и в дальнейшем, мы используем свойство циклической перестановки под знаком следа. Используя (1.12), получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}) &= \mathrm{Tr}\left\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F^*_{\mu\nu} - A_\mu\partial_\nu F^*_{\mu\nu}\right\} = \\ &= \mathrm{Tr}\left\{\partial_\mu A_\nu \cdot F^*_{\mu\nu} - \partial_\nu(A_\mu F^*_{\mu\nu})\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left\{\partial_\mu A_\nu F_{\alpha\beta} - \partial_\nu(A_\mu F_{\alpha\beta})\right\} = \\ &= \mathrm{Tr}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left\{(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) - \partial_\nu(A_\mu\partial_\alpha A_\beta + A_\mu A_\alpha A_\beta)\right\} = \\ &= \mathrm{Tr}\left\{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) + (\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta - \partial_\nu A_\mu\partial_\alpha A_\beta - \right. \\ &\quad \left. - A_\mu\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta - \partial_\nu(A_\mu A_\alpha A_\beta)]\right\}.\end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta\} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta)\}, \\ &\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[-(\partial_\nu A_\mu)(\partial_\alpha A_\beta)] = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta), \\ &\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta = 0.\end{aligned}$$

Получаем

$$\operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}) = \operatorname{Tr}\left\{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[2(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) + \frac{4}{3}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta)\right]\right\} =$$
$$= \operatorname{Tr}\left\{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[2(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) + 2A_\nu\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + \frac{4}{3}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta)\right]\right\} =$$
$$= \operatorname{Tr}\left\{2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[\partial_\mu\left(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)\right]\right\} =$$
$$= \partial_\mu\left\{\operatorname{Tr} 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right]\right\}.$$

Обозначим

$$J_\mu = \operatorname{Tr}\left\{2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right]\right\}.$$

Пусть $B(R)$ — шар радиуса R в $\mathbb{R}^4$. Тогда

$$\int\limits_{B(r)} \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu})\,d^4x = \int\limits_{B(r)} \partial_\mu J_\mu\,d^4x = \int\limits_{S^3(R)} J_\mu\,ds^\mu =$$
$$= 2\int\limits_{S^3(R)} \operatorname{Tr}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)ds^\mu. \quad (1.13)$$

Воспользуемся теперь условием, что $F_{\mu\nu} \to 0$ при $R \to \infty$, т. е. $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -[A_\mu, A_\nu]$ и тем, что $2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu A_\nu = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, A_\nu] = -2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\mu A_\nu$. Получаем при $R \to \infty$

$$\int\limits_{B(R)} \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu})\,d^4x =$$
$$= 2\int\limits_{S^3(R)} \operatorname{Tr}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left(-A_\nu A_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)ds^\mu =$$
$$= -\frac{2}{3}\int\limits_{S^3(R)} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\operatorname{Tr}(A_\nu A_\alpha A_\beta)\,ds^\mu. \quad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в (1.10) и (1.11), получаем утверждение теоремы.

Замечание. Все вычисления, проведенные в доказательстве последней теоремы, — это рабочий аппарат физика; использованные нами обозначаения считаются в физике «обычными обозначениями». Математики называют такой аппарат координатным и предпочитают работать в «бескоординатной» форме. Попробуем привести словарь перевода из одной формы в другую.

$\partial_\mu\, dx^\mu$	d — дифференциал
$F_{\mu\nu}$	$F = F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$ — 2-форма
$\frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho$	$dV = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$ — форма объема
$F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}$	$*F = F^*_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$ — сопряженная 2-форма

Например,

$$q = \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} F^*_{\mu\nu}\, d^4x = $$
$$= \frac{1}{32\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \operatorname{Tr} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}\, d^4x = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \operatorname{Tr} F \wedge F.$$

Из равенства (1.9) и того, что $\omega = \frac{1}{2}\, d(\sum (n^i)^2)$ — форма, ортогональная к сфере S^3, следует, что Ω — форма трехмерного объема на S^3.

Тождество Бьянки записывается как

$$[\nabla, F] = dF + A \wedge F - F \wedge A = 0.$$

Вместо J_μ нужно рассматривать дифференциальную форму $J = J_\mu\, ds^\mu$. Тогда равенство (1.13) есть просто теорема Стокса.

Вернемся к нашему действию $S[A]$. Получаем, что

$$S[A] = \frac{1}{4} \operatorname{Tr} \int F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}\, d^4x = $$
$$= \frac{1}{8} \operatorname{Tr} \int (F_{\mu\nu} - F^*_{\mu\nu})^2\, d^4x + \frac{1}{4} \operatorname{Tr} \int F_{\mu\nu} F^*_{\mu\nu}\, d^4x \geqslant 8\pi^2 q.$$

Если минимум существует, то поле, на котором он достигается, должно удовлетворять уравнению *дуальности*: $F_{\mu\nu} = F^*_{\mu\nu}$.

Решения этого уравнения называют *инстантонами*.

При $q = 1$ решения уравнения дуальности имеют вид

$$A_\mu = \frac{x^2}{x^2 + \rho^2} n^+ \partial_\mu n,$$

где

$$n = \frac{x_0 \mathbb{1} + i\vec{x}\vec{\sigma}}{|x|}, \quad n^+ = \frac{x_0 \mathbb{1} - i\vec{x}\vec{\sigma}}{|x|}, \quad \vec{x}\vec{\sigma} = x^\mu \sigma_\mu.$$

Эти решения сферически симметричные. Остальные решения получаются из этого действием группы $x_\mu \to x_\mu + a_\mu$; $x_\mu \to \lambda x_\mu$. Решения составляют 5-параметрическое семейство.

Известно, что для $q > 0$ существует $(8|q| - 3)$-параметрическое семейство решений уравнения автодуальности.

4. ОТО (гравитация)

Специальная теория относительности показала, что геометрия играет важную роль в физике. Общая теория относительности идет дальше и делает шаг к тому, чтобы свести физику к геометрии, а именно, гравитация сводится к метрической структуре пространства-времени.

Роль гравитации играет риманова (псевдориманова) структура пространства-времени, на кривизну которой влияет плотность энергии-импульса материи. При этом частицы самой материи движутся по геодезическим.

Специальная теория относительности несовместима с ньютоновской теорией гравитации, основанной на постулате мгновенного дальнодействия.

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 4\pi k\rho, \\ \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\operatorname{grad}\Phi, \end{cases}$$

здесь Φ — гравитационный потенциал, ρ — плотность массы материи, $\vec{r}(t)$ — координаты частицы.

Эти уравнения можно модифицировать так, чтобы взаимодействие было запаздывающим и передавалось со скоростью света, но при этом