Если минимум существует, то поле, на котором он достигается, должно удовлетворять уравнению *дуальности*: $F_{\mu\nu} = F^*_{\mu\nu}$.

Решения этого уравнения называют *инстантонами*.

При $q = 1$ решения уравнения дуальности имеют вид

$$A_\mu = \frac{x^2}{x^2 + \rho^2} n^+ \partial_\mu n,$$

где

$$n = \frac{x_0 \mathbb{1} + i\vec{x}\vec{\sigma}}{|x|}, \quad n^+ = \frac{x_0 \mathbb{1} - i\vec{x}\vec{\sigma}}{|x|}, \quad \vec{x}\vec{\sigma} = x^\mu \sigma_\mu.$$

Эти решения сферически симметричные. Остальные решения получаются из этого действием группы $x_\mu \to x_\mu + a_\mu$; $x_\mu \to \lambda x_\mu$. Решения составляют 5-параметрическое семейство.

Известно, что для $q > 0$ существует $(8|q| - 3)$-параметрическое семейство решений уравнения автодуальности.

4. ОТО (гравитация)

Специальная теория относительности показала, что геометрия играет важную роль в физике. Общая теория относительности идет дальше и делает шаг к тому, чтобы свести физику к геометрии, а именно, гравитация сводится к метрической структуре пространства-времени.

Роль гравитации играет риманова (псевдориманова) структура пространства-времени, на кривизну которой влияет плотность энергии-импульса материи. При этом частицы самой материи движутся по геодезическим.

Специальная теория относительности несовместима с ньютоновской теорией гравитации, основанной на постулате мгновенного дальнодействия.

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 4\pi k\rho, \\ \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\operatorname{grad}\Phi, \end{cases}$$

здесь Φ — гравитационный потенциал, ρ — плотность массы материи, $\vec{r}(t)$ — координаты частицы.

Эти уравнения можно модифицировать так, чтобы взаимодействие было запаздывающим и передавалось со скоростью света, но при этом свет не будет искривляться в гравитационном поле, что противоречит опыту: *при полных солнечных затмениях видимые положения звезд отличны от истинных*.

Основания для расширения постулата относительности

Эйнштейн искал обобщения СТО из философских соображений. Ему не нравилась выделенность инерциальных систем отсчета.

Пусть R_1, R_2 — два соосных кольца, одно из которых покоится, а другое вращается. Причиной того, что $\pi(R_2) \neq 3{,}14\ldots$, а $\pi(R_1) = 3.14\ldots$, выставлялось то, что R_1 покоится относительно галилеева пространства, т. е. такого, относительно которого верен закон инерции, а R_2 — нет. Но, очевидно, это фиктивная причина. Нет такого опытного факта, как галилеево пространство.

Законы природы должны быть справедливы для произвольно движущихся систем. Это называется *постулатом общей ковариантности*.

Важный физический факт. Пусть K — галилеева система, масса M покоится в ней. Пусть K' равноускоренно и прямолинейно движется относительно K. Тогда M совершает относительно K' ускоренное движение, причем ускорение не зависит от физического и химического состояния тела. Может ли наблюдатель, покоящийся в K', заключить, что он «действительно» находится в ускоряющейся системе отсчета? Нет! Ибо такое поведение масс можно объяснить наличием гравитационного поля, вызывающего ускоренное движение, причем так, что ускорение не зависит от массы тела, его физического и химического состава. Еще Галилей задавал себе вопрос о равенстве инерционной и гравитационной масс. Эксперимент Этвеша показал, что

$$\frac{m_{\text{тяж}} - m_{\text{инер}}}{m_{\text{тяж}}} < 10^{-8},$$

поэтому можно считать, что $m_{\text{тяж}} = m_{\text{инер}}$.

Из этого равенства следует, что гравитационное поле локально можно создать или уничтожить изменением координатной системы. Это утверждение называется *принципом эквивалентности*.

Это, в свою очередь, означает, что общая теория относительности — это теория гравитации.

Гравитация и геометрия

Нет оснований предполагать, что систему координат можно выбрать так, чтобы она была галилеевой или евклидовой. Поэтому следует допустить произвольные системы координат и искать формулировку законов природы, ковариантную относительно любых замен координат.

Итак, каждому событию соответствует (x_1, x_2, x_3, x_4) в произвольной системе координат. Вместо твердого тела — *моллюск отсчета,* как говорил Эйнштейн (моллюск как нечто аморфное).

Метрика = гравитация

Естественно считать, что для бесконечно малых четырехмерных областей при подходящем выборе системы координат справедлива специальная теория относительности. Т. е. в ней даны линейки небольших размеров и часы, измеряющие (x_1, x_2, x_3, x_4); с помощью них измеряется интервал между бесконечно близкими событиями внутри бесконечно малой области $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^3 - dx_4^2$. И это инерциальная система, в ней нет гравитации, и частица движется равномерно по прямой.

Линейному элементу ds в некоторой выбранной системе координат соответствует (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4); $dx^\mu = a^\mu_\nu\, dx^\nu$; $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$. Специальная теория относительности предполагает частный случай: координаты можно выбрать так, что $\widetilde{g}_{\mu\nu} = (1, 1, 1, -1)$ всюду. В общем случае произвольного $g_{\mu\nu}$ такой выбор невозможен. $g_{\mu\nu}$ следует рассматривать как величины, описывающие гравитационное поле. Если $g_{\mu\nu}$ в некоторой области постоянны, то движение материальных частиц в этой системе координат равномерно и прямолинейно. Но и в других координатах ускорение и криволинейность не зависит от физической природы тела, т. е. движение можно истолковать как движение в гравитационном поле.

Итак, появление гравитационного поля связано с зависимостью $g_{\mu\nu}$ от пространственно-временных координат. Но и в общем случае, когда нельзя $g_{\mu\nu}$ привести к виду $(1, 1, 1, -1)$ в конечной области, мы предположим, что задание метрического тензора $g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ эквивалентно определению гравитационного поля.

Уравнение геодезической (движение материальной точки)

Выведем уравнение геодезической из принципа наименьшего действия для функционала длины.

$$\delta\left\{\int\limits_{P_1}^{P_2} ds\right\} = 0, \quad x^\mu = x^\mu(\lambda); \quad \delta\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\,d\lambda = 0.$$

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\left\{\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}}\frac{\partial x^\alpha}{d\lambda}\frac{\partial x^\beta}{d\lambda}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right\}\delta x^\nu = 0.$$

Замечание. Не забудьте, что варьировать нужно не только x^μ, но и $g_{\mu\nu}(x)$ по x^μ.

Выбрав $\lambda = s$ — натуральным параметром, т. е. таким параметром, что $g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 1$, получаем

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_\mu^{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0, \text{ где } \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right)$$

называются *символами Кристоффеля*. Очевидно, что геодезическая на каждом участке, размер которого меньше радиуса кривизны, является прямой. Это и есть ее определение. Поэтому *из принципа эквивалентности следует, что частица движется по геодезической.*

Ковариантное дифференцирование

В галилеевых координатах dA_μ — вектор, как и A_μ, а $\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ — тензор. По отношению к криволинейным координатам и произвольным преобразованиям координат это уже не так. И связано это с тем, что $dA_\mu = A_\mu(x+dx) - A_\mu(x)$ — разность векторов в различных точках. Каждый из членов разности преобразуются различно, так как в формулах $A^\mu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial \widetilde{x}^\nu}\widetilde{A}^\nu$ и $A_\mu = \dfrac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\mu}\widetilde{A}_\nu$ матрицы $\dfrac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}$ зависят от x.

Чтобы найти аналоги производных от тензоров, но преобразующихся правильно, надо определить понятие *параллельного переноса* так, чтобы при преобразовании галилеевых координат компоненты вектора при переносе не менялись. Определим

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu \, dx^\lambda.$$

В галилеевой системе координат $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0$. Теперь $DA^\mu \stackrel{\text{def}}{=} dA^\mu - \delta A^\mu$ — вектор и

$$DA^\mu = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu \right) dx^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla_\lambda A^\mu) \, dx^\lambda.$$

Так как скаляры не меняются при параллельном переносе, то $\delta(A^\mu B_\mu) = 0$. Отсюда следует, что $\delta B_\mu = \Gamma^\nu_{\mu\lambda} B_\nu \, dx^\lambda$ и

$$DB_\mu = \left(\frac{\partial B_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} B_\nu \right) dx^\lambda = (\nabla_\lambda B_\mu) \, dx^\lambda,$$

∇_μ называется *ковариантной производной*.

Аналогично

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda A_{\mu\nu} &= \partial_\lambda A_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} A_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} A_{\mu\alpha}; \\ \nabla_\lambda A^\mu \ldots &= (\partial_\lambda + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} + \ldots) A^\alpha \ldots; \\ \nabla_\lambda (A_\mu B_\nu) &= (\nabla_\lambda A_\mu) \, B_\nu + A_\mu \nabla_\lambda B_\nu; \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Закон преобразования символов Кристоффеля выводится из тензорного характера преобразования ковариантной производной: $\nabla_\mu A_\nu = \dfrac{\partial \widetilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \dfrac{\partial \widetilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{A}_\beta$, отсюда $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial \widetilde{x}^\gamma} \dfrac{\partial \widetilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \dfrac{\partial \widetilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} + \dfrac{\partial^2 \widetilde{x}^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial \widetilde{x}^\rho}$. (Сравните с преобразованием A_μ — калибровочной связности.)

Отсюда видно, что $(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu})$ — тензор, который называют *тензором кручения*. Если существует система координат, где кручение равно 0, то оно везде будет равно 0 и $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$. Будем рассматривать в дальнейшем такие метрики, где кручение равно 0.

Локально геодезическая система координат

Пусть в x_0^μ $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x_0) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu 0}$. Возьмем новые координаты вблизи x_0: $\widetilde{x}^\mu = x^\mu + \frac{1}{2} \Gamma^\mu_{\alpha\beta 0} x^\alpha x^\beta + \ldots$. Тогда $\widetilde{\Gamma}(x_0) = 0$. Так как $\dfrac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}(x_0) = \delta^\mu_\nu$, то эти преобразования не меняют тензоров в точке x_0, поэтому в ней одновременно можно привести $g_{\mu\nu}$ к галилеевому виду. Такая система называется *локально геодезической*.

Связь $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ с $g_{\mu\nu}$ устанавливается из условия согласования параллельного переноса и операции поднятия индексов. Связность согласована с метрикой, если параллельный перенос сохраняет скалярное произведение. Из этого условия получаем, что

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right). \tag{1.15}$$

Такая метрика называется *римановой* (*псевдо-римановой*).

Тензор кривизны

При переносе по малому замкнутому контуру $\Delta A_{\mu} = \oint \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A_{\nu}\, dx^{\lambda} \approx$ $\approx R^{\nu}_{\mu,\alpha\beta} A_{\nu} \Delta\sigma^{\alpha\beta}$, где

$$R^{\nu}_{\mu\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}. \tag{1.16}$$

Величина $R^{\nu}_{\mu\alpha\beta}$ — это тензор, ибо ΔA_{μ} — разность в одной точке. Тензор $R^{\nu}_{\mu\alpha\beta}$ называется *тензором кривизны*. Если пространство плоское, $R^{\nu}_{\mu\alpha\beta} = 0$ и наоборот. Первая часть очевидна. Вторая следует из того, что в бесконечно малой окрестности точки можно взять галилеевскую систему, а из $R = 0$ следует возможность однозначного ее разнесения во все точки.

Свойства тензора кривизны

Тензор кривизны $R^{\nu}_{\mu\alpha\beta}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = -R^{\mu}_{\nu\beta\alpha}; \quad R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} + R^{\mu}_{\alpha\beta\nu} + R^{\mu}_{\beta\nu\alpha} = 0. \tag{1.17}$$

Введем величину $R_{\mu\nu\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} g_{\mu\lambda} R^{\lambda}_{\nu\alpha\beta}$. Из соотношений (1.15), (1.16), (1.17) после вычислений получаем, что

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} &\left(\partial_{\nu}\partial_{\alpha} g_{\mu\beta} + \partial_{\mu}\partial_{\beta} g_{\nu\alpha} - \partial_{\mu}\partial_{\alpha} g_{\nu\beta} - \partial_{\nu}\partial_{\beta} g_{\mu\alpha} \right) + \\ &+ g_{\rho\sigma} \left(\Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta} - \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} \right), \end{aligned} \tag{1.18}$$

отсюда следует равенство $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$.

Тензор кривизны $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ удовлетворяет тождеству Бьянки

$$\nabla_\gamma R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R^{\mu}_{\nu\beta\gamma} + \nabla_\beta R^{\mu}_{\nu\gamma\alpha} = 0.$$

Определим величину $R_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$, которая называется *тензором Риччи*.

Из (1.15), (1.16), (1.17), (1.18) следует, что

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}, \quad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}.$$

Кроме того, $\nabla_\mu R^{\mu}_{\alpha} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial R}{\partial x^{\alpha}}$, где величина $R \stackrel{\text{def}}{=} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ называется *скалярной кривизной*. Из-за свойств симметрии и тождества Бьянки следует, что тензор кривизны имеет 20 независимых компонент, а $R_{\mu\nu}$ имеет 10 независимых компонент, которые удовлетворяют дифференциальному тождеству

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu \left(R_{\nu\lambda} - \frac{1}{2} g_{\nu\lambda} R \right) = 0. \tag{1.19}$$

Уравнения Эйнштейна

Эйнштейн исходил из того, что уравнения на метрику $g_{\mu\nu}$ должны удовлетворять следующим условиям:

1) быть общековариантными;
2) плоское пространство ($R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$) должно быть их решением;
3) число уравнений должно быть равно числу независимых переменных $g_{\mu\nu} = 10$ (т. е. равно 10);
4) быть дифференциальными уравнениями второго порядка, переходящими в случае слабой гравитации в ньютоновские $\Delta\varphi = 0$.

Этим условиям удовлетворяют уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{или} \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right) = 0. \tag{1.20}$$

В пустом пространстве они эквивалентны. Действительно, в слабом поле, т. е. когда $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, где $\eta_{\mu\nu}$ — метрика Минковского, $h_{\mu\nu} \ll 1$, уравнение движения частицы:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \sim -\frac{\partial h_{44}}{\partial x^i},$$

т. е. h_{44} играет роль ньютоновского потенциала и уравнения Эйнштейна преобразуются в

$$\Delta(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) = 0, \quad \text{где } h \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}.$$

Отсюда понятно, как модифицировать уравнение Эйнштейна в присутствии материи. Надо добавить в правую часть тензор второго ранга $T_{\mu\nu}$, такой, что в пределе T_{44} стремится к плотности энергии, равной плотности гравитационной массы. Это тензор энергии-импульса материи.

Поэтому уравнения примут вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}.$$

Теперь второй член в левой части необходим для согласованности уравнений, ибо теперь, вообще говоря, $R \neq 0$, а $g^{\mu\nu}\nabla_\mu T_{\nu\mu} = 0$.

В слабом поле получаются уравнения Ньютона. Действительно, рассмотрим движение медленной материальной точки в слабом гравитационном поле

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

Если $v \ll c$ и гравитационное поле слабое, т. е. $g_{\mu\nu} \approx (1, 1, 1, -1)$ и не зависит от t, то, взяв за параметр s время t, получаем

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + c^2\Gamma^i_{44} = 0; \quad x^4 = ct; \quad \Gamma^i_{44} = \Gamma_{i,44} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}.$$

Вспомним, что $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)$, или

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}, \quad \text{где } g_{44} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2}.$$

Уравнения Эйнштейна $R_{ik} = -k\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right)$, где $T_{\mu\nu} = \mu_0 u_\mu u_\nu$; $T_{44} = \mu_0 c^2; T = -\mu_0 c^2$ — тензор энергии-импульса, при $v \ll c$ примут вид

$$R_{44} = -\frac{1}{2}k\mu_0 c^2; \quad R_{44} \approx -\frac{\partial T^\alpha_{44}}{\partial x^\alpha};$$
$$\Gamma^\alpha_{44} \approx -\Gamma_{\alpha,44} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x^2_\alpha} = -\frac{\Delta\Phi}{c^2}.$$

Окончательно получаем, что $\Delta\Phi = \frac{1}{2}kc^2\mu_0$.

Утверждение, что при малых массах и скоростях уравнения Эйнштейна переходят в уравнения Ньютона, называется *принципом соответствия*.

Решение Шварцшильда

Найдем стационарное, сферически симметричное решение уравнений Эйнштейна — аналог ньютонова

$$\varphi = -G\frac{M}{r}.$$

Запишем метрику в виде $d\rho^2 = c^2\,dt^2 g_{00} - g_{11}\,dr^2 - r^2\,d\Omega^2$; $g_{00} = e^\nu$; $g_{11} = e^\lambda$. Из стационарности и сферической симметрии следует, что $g_{00} = g_{00}(r)$, $g_{11} = g_{11}(r)$. Для коэффициентов в $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ и $R_{\mu\nu}$ имеем $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \Theta$, $x^3 = \varphi$, $a' = \frac{\partial a}{\partial r}$, $\dot a = \frac{\partial a}{\partial t}$ и

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^1_{11} = \lambda'/2; & \Gamma^0_{10} = \nu'/2; & \Gamma^2_{33} = -\sin\Theta\cos\Theta; \\
\Gamma^0_{11} = \frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu}; & \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}; & \Gamma^1_{00} = (\nu'/2)e^{\nu-\lambda}; \\
\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = 1/r; & \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\Theta; & \Gamma^0_{00} = \dot\nu/2; \\
\Gamma^1_{10} = \dot\lambda/2; & \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\Theta e^{-\lambda}. &
\end{array}$$

Составляя уравнение $R_{\mu\nu} = 0$, получаем

$$\dot\lambda = 0; \quad e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0; \quad e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0,$$

откуда $\nu + \lambda = f(t)$. При замене $t \to t'(t)$, $\nu \to \widetilde{\nu} = \nu - \ln\left(\frac{dt'}{dt}\right)^2$ можно обратить $f(t)$ в 0. После чего получаем решение

$$g_{00} = 1 - r_g/r, \quad g_{11} = \frac{1}{1 - r_g/r},$$

где r_g — некая константа. При $r \to \infty$ $g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{r_g}{r}$, $\Phi =$ $= -\frac{r_g c^2}{2}\frac{1}{r}$. Сравнивая Φ с $\Phi_H = -\frac{GM}{r}$, получаем $r_g = \frac{2GM}{c^2}$. Эту величину называют *гравитационным радиусом*. Простые вычисления дают r_g(Солнца) $= 3$ км, r_g(Земли) $= 0.44$ см.

Это решение корректно для $r > r_g$. При $r = r_g$ решение имеет сингулярность.

Движение перигелия Меркурия и искривление световых лучей

Уравнения движения материальной частицы

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = c^2, \tag{1.21}$$

и для движения света

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{1.22}$$

могут быть выведены из вариационного принципа $S = \int L\, d\lambda$, где $L = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$.

Для случая, когда $g_{\mu\nu}$ — метрика Шварцшильда, имеется два интеграла движения:

1) вследствие центральной симметрии сохраняется момент количества движения, т. е. плоскость движения ($\Theta = \pi$) и величина $M = r^2\frac{d\varphi}{d\tau}$;

2) вследствие стационарности сохраняется «энергия»: $\varepsilon = g_{00}\frac{dt}{d\tau}$ (в случае (1.22), $\tau = \lambda$).

Итак, имеем дополнительное условие

$$(1 - r_g/r)c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - r_g/r}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = qc^2$$

($q = 1$ для частицы с $m \neq 0$; $q = 0$ для света) и два интеграла движения: $(1 - r_g/r)c^2\frac{dt}{d\tau} = \varepsilon$ — энергия и $r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = M$ — момент.

Из них мы получаем

$$\frac{M^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \left(qc^2 + \frac{M^2}{r^2}\right)(1 - r_g/r)\,.$$

Сделав замену $r = \frac{1}{u}$, получаем

$$M^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - (qc^2 + M^2u^2)(1 - r_gu) =$$
$$= \left(\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right) + qc^2r_gu - M^2u^2 + r_gM^2u^3 - qc^2. \quad (1.23)$$

Движение происходит в потенциальном поле.

Случай массивной частицы (q=1)

Продифференцировав (1.23), получаем

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \alpha(1 + \lambda u^2), \quad (1.24)$$

где $\alpha = \frac{c^2r_g}{2M^2} = \frac{Gm}{M^2}$, $\lambda = \frac{3M^2}{c^2}$ — малый параметр (напомним, что M — это момент частицы, а m — масса солнца).

В нулевом приближении $u = \alpha(1 - \varepsilon\cos\varphi)$. Если $\lambda = 0$, то u — периодическая функция φ, при $\lambda \ll 1$ период мало отличен от 2π и решение ищем в виде ряда Фурье. С точностью до первого порядка по λ имеем

$$\begin{aligned} u &= \alpha + \lambda\beta_0 - \alpha\cos\rho\varphi + \lambda\sum_{k=2}^{\infty}\beta_k\cos k\rho\varphi; \\ u'' &= \rho^2\left(a\varepsilon\cos\rho\varphi - \lambda\sum k^2\beta_k\cos k\rho\varphi\right); \\ \lambda u^2 &= \lambda\alpha^2\left(1 - 2\varepsilon\cos\rho\varphi + \varepsilon^2\cos^2\rho\varphi\right). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Уравнение (1.24) теперь можно переписать так:

$$\alpha + \lambda\beta_0 - \alpha\varepsilon(\rho^2 - 1)\cos\rho\varphi - \lambda\sum_k(k^2 - 1)\beta_k\cos k\rho\varphi_0 \simeq$$
$$\simeq \alpha\left(1 + \lambda\alpha^2\left(1 - 2\varepsilon\cos\rho\varphi + \varepsilon^2\cos^2\rho\varphi\right)\right).$$

Приравнивая члены при $\cos\rho\beta$ и $\cos 2\rho\varphi$, получаем

$$\beta_0 = \alpha^3(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}); \quad 1 - \rho^2 = 2\lambda\alpha^2; \quad -3\beta_2 = \alpha^3\frac{\varepsilon^2}{2}; \quad \rho \approx 1 - \lambda\alpha^2.$$

Откуда угол между двумя перигелиями получается из формулы

$$\Phi = 2\pi(1 + \lambda\alpha^2) = 2\pi + 6\pi\frac{G^2 m^2_{\text{солнца}}}{M^2 c^2}.$$

Для Меркурия эта поправка приводит к смещению на $43''$ в столетие. Это хорошо согласуется с опытом в пределах ошибок. Релятивистский эффект в поле $\frac{1}{r}$ в 6 раз меньше.

Случай света (q=0)

В этом случае, продифференцировав (1.23), получим

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2} - u^2 + r_g u^3, \tag{1.26}$$

где $\rho = \frac{M}{c\varepsilon}$ — прицельное расстояние. В нулевом приближении решения уравнения $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2} - u^2$ имеют вид $u = \frac{1}{\rho}\cos(\varphi - \varphi_0)$.

Это уравнение прямой, проходящей на расстоянии ρ от Солнца. Угол между двумя нулями $u_0(\varphi)$, т. е. асимптотами, равен π. Продифференцировав (1.26) по φ, получим

$$u'' + u = \frac{3}{2} r_g u^2.$$

Чтобы найти поправку, будем искать решение в виде $u = u_0 + r_g u_1 + \ldots$, тогда

$$u_0'' + u_0 = 0; \quad u_0 = A\cos\varphi, \quad (A = 1/\rho);$$
$$u_1'' + u_t 1 = \frac{3}{2} u_0^2 = \frac{3}{2} A^2 \cos^2\varphi, \quad r_g \text{ — малый параметр.}$$

Получаем решение $u_1 = \dfrac{3}{4}A^2 - \dfrac{1}{4}A^2\cos 2\varphi + B\cos\varphi + C\sin\varphi$. Из условия $\left(\dfrac{du}{d\varphi}\right)^2 = \dfrac{1}{\rho} - u^2 + r_g u^3$ следует, что $A = \dfrac{1}{\rho}$; $B = 0$, C определяет произвол в начале отсчета φ, поэтому положим $C = 0$.

Направление на бесконечности φ_∞ определяется условием

$$u(\varphi_\infty) = u_0(\varphi_\infty) + r_g u_1(\varphi_\infty) = 0;$$
$$A\cos\varphi_\infty + r_g\left(\frac{3}{4}A^2 - \frac{1}{4}A^2\cos 2\varphi_\infty\right) = 0;$$
$$\varphi_\infty = \frac{\pi}{2} + r_g A.$$

Таким образом, отклонение луча

$$\Delta\varphi = 2(\varphi_\infty - \varphi_0) = 2r_g A = \frac{2r_g}{\rho}.$$

Изотропные модели Фридмана

Распределение вещества во Вселенной однородно и изотропно. Это подтверждается современными астрономическими наблюдениями. Естественно предположить, что и метрика также однородна и изотропна. В этом случае скалярная кривизна λ трехмерной метрики γ_{jk} постоянна (мы считаем, что $ds^2 = c^2\,dt^2 - \gamma_{ik}\,dx^i\,dx^k$). Возможны три случая:

1) $\lambda > 0$ — пространство постоянной положительной кривизны. Примером является сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$.
2) $\lambda < 0$ — пространство постоянной отрицательной кривизны, пространство Лобачевского.
3) $\lambda = 0$ — плоское евклидово пространство.

Случай 1. Метрика пространства совпадает с метрикой трехмерной сферы радиуса R, $S^3 = \left\{(x_1, x_2, x_3, y) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y^2 = R^2\right\}$: $dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dy^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \dfrac{(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$. Кривизна $\lambda = \dfrac{1}{R}$, где R — радиус сферы или радиус кривизны. Введем в пространстве (x_1, x_2, x_3) сферические координаты R, θ, φ. Тогда

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2\left(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2\right).$$

В этих координатах длина окружности равна $2\pi r$, а радиус этой окружности равен $\int \dfrac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} = R \arcsin\dfrac{r}{R} = R\chi$, где χ — новая координата и $r = R\sin\chi$.

Новые координаты χ, θ, φ — это сферическая параметризация трехмерной сферы и метрика в них выражается как

$$dl^2 = R^2\left(d\chi^2 + \sin^2\chi\left(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right).$$

В этих координатах площадь сферы радиуса χ равна $4\pi R^2 \sin^2\chi$, а объем всего пространства $V = 2\pi^2 R^3$ конечен.

Случай 2. При $\lambda < 0$ проще всего получить метрику, сделав замену $R \to iR$ в предыдущем случае. Тогда

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/R^2} + r^2\left(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2\right),$$

или после введения новой координаты такой, что $r = R\,\mathrm{sh}\,\chi$

$$dl^2 = R^2\left(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi\left(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right).$$

Случай 3. $\lambda = 0$. Это привычное евклидово пространство с метрикой

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

или в сферических координатах r, θ, φ

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \left(\sin^2\theta \, d\varphi^2 + d\theta^2\right).$$

Кардинальным шагом Фридмана (1922 г.) был отказ от стационарности Вселенной. Фридман предположил, что во всех случаях $R = R(t)$. Последующие наблюдения Хаббла (1925–1927 года) подтвердили это предположение.

При исследовании метрики удобна сопутствующая система, в которой данная частица вещества (галактика) покоится. Выберем время t так, чтобы $ds^2 = c^2\,dt^2 - dl^2$. Это означает, что t — собственное время частицы.

Случай 1. Закрытая модель. $\lambda>0$

При нашем выборе метрика равна

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - R^2(t)\left(d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\right).$$

Введем новую координату η так, чтобы $c\,dt = R(\eta)\,d\eta$. Тогда

$$ds^2 = R^2(\eta)\left(d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\right).$$

Выпишем компоненты метрического тензора, символы Кристоффеля и компоненты тензора Риччи.

$$\begin{aligned} g_{00} &= R^2(\eta), & g_{11} &= -R^2(\eta),\\ g_{22} &= -R^2(\eta)\sin^2\chi, & g_{33} &= -R^2(\eta)\sin^2\chi\sin^2\theta; \end{aligned}$$

$$\Gamma^0_0 = \frac{R'(\eta)}{R(\eta)}, \quad \Gamma^0_{ik} = \frac{R'(\eta)}{R^3(\eta)}g_{ik}, \quad \Gamma^i_{0k} = \frac{R'(\eta)}{R(\eta)}\delta^i_k, \quad \Gamma^0_{0i} = \Gamma^i_{00} = 0.$$

Здесь штрих означает производную по η $\left(R'(\eta) = \dfrac{dR}{d\eta}\right)$. Единственная ненулевая величина R^0_0 равна $R^0_0 = -\dfrac{3}{R^4(\eta)}((R'(\eta))^2 - R(\eta)R''(\eta))$, а скалярная кривизна равна

$$R = -\frac{6}{R^3(\eta)}(R(\eta) + R''(\eta)).$$

Тогда

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = \frac{3}{R^4(\eta)}(R^2(\eta) + (R'(\eta))^2).$$

Обозначим ту же компоненту тензора энергии-импульса T_0^0 через $\varepsilon(\eta)$.

Уравнение Эйнштейна превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{3}{R^4(\eta)}\left(R^2(\eta) + \left(R'(\eta)\right)^2\right) = \frac{8\pi}{c^4}\gamma\varepsilon(\eta). \tag{1.27}$$

Сделаем предположение, что взаимодействием вещества можно пренебречь, т. е.давление $p = 0$ и $\varepsilon(\eta) = c^2\mu(\eta)$, где $\mu(\eta)$ — плотность материи (массы). Эта модель называется *пылевидной материей*. Кроме того, можно считать, что общая масса вещества во Вселенной

$$M = 2\pi^2 R^3(\eta)\mu(\eta) = \mathrm{const}, \qquad \text{или} \qquad \mu(\eta) = \frac{M}{2\pi^2 R^3(\eta)}.$$

Эти предположения называются уравнениями состояния. Подставляя их в уравнение (1.27), получаем

$$\frac{3}{R(\eta)}\left(R^2(\eta) + \left(R'(\eta)\right)^2\right) = \frac{4M\gamma}{\pi c^2},$$

$$\int \frac{dR}{\sqrt{\frac{4\gamma M}{3\pi c^2}R - R^2}} = \pm\eta + \mathrm{const}\,.$$

Выделяя полный квадрат и обозначая $\dfrac{2\gamma M}{3\pi c^2} = R_0$, получаем

$$\arcsin\left(\frac{R}{R_0} - 1\right) = \pm\eta + \mathrm{const}\,.$$

Стандартный выбор знака и константы интегрирования приводит к окончательному результату

$$R(\eta) = R_0(1 - \cos\eta).$$

Чтобы найти t, подставим полученное выражение в уравнение $c\,dt = R(\eta)\,d\eta$, тогда

$$t = \frac{R_0}{c}\int(1-\cos\eta)\,d\eta = \frac{R_0}{c}(\eta - \sin\eta).$$

Окончательный ответ

$$\begin{cases} R = R_0(1-\cos\eta), \\ t = \dfrac{R_0}{c}(\eta - \sin\eta), \\ R_0 = \dfrac{2\gamma M}{3\pi c^2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что радиус Вселенной $R(t)$ изменяется по циклоиде, возрастая от 0 при $t = 0$ до максимального значения $R = 2R_0$ при $t = \frac{\pi R_0}{c}$, а затем убывая до 0 при $t = \frac{2\pi R_0}{c}$.

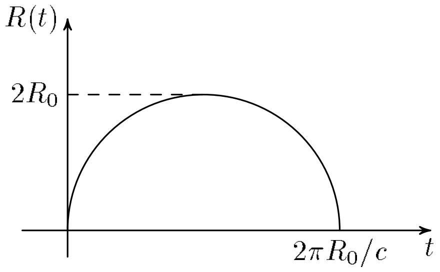

Рис. 1.5.

Учет давления не меняет факта сингулярности.

Случай 2. Открытая модель. $\lambda<0$

Как и в закрытой модели, при нашем выборе метрика равна

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - R^2(t)\left(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\,\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\right).$$

Так же, как и в закрытой модели, вводим новую координату η такую, что $c\,dt = R(\eta)\,d\eta$. После аналогичных вычислений компонент метрического тензора, символов Кристоффеля и компонент тензора Риччи, уравнение Эйнштейна превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{3}{R^4(\eta)}\Big(\big(R'(\eta)\big)^2 - R^2(\eta)\Big) = \frac{8\pi}{c^4}\gamma\varepsilon(\eta).$$

Решая его в модели пылевидной материи и предполагая, как и в закрытой модели, что $2\pi\mu(\eta)R^3(\eta) = M = \mathrm{const}$, получаем

$$\begin{cases} R = R_0(\operatorname{ch}\eta - 1), \\ t = \dfrac{R_0}{c}(\operatorname{sh}\eta - \eta), \\ R_0 = \dfrac{2\gamma M}{3\pi c^2}. \end{cases}$$

Интересно, что во всех трех моделях в точке сингулярности $t \sim 0$ радиус Вселенной ведет себя одинаково: $R(t) \sim t^{2/3}$.