Независимый Московский Университет
Московский Центр непрерывного математического образования

Математический Колледж

Ю. М. Бурман, Б. Л. Фейгин

Бесконечномерные алгебры Ли — I: полубесконечные формы, алгебра Вирасоро и вертексные операторы

МЦНМО МК НМУ

Независимый Московский Университет
Московский Центр непрерывного математического образования

Математический Колледж

Ю. М. Бурман, Б. Л. Фейгин

Бесконечномерные алгебры Ли — I: полубесконечные формы, алгебра Вирасоро и вертексные операторы

МЦНМО, МК НМУ 1997

Бурман Юрий Михайлович
Фейгин Борис Львович, д.ф.-м.н.

Ю. М. Бурман, Б. Л. Фейгин. Бесконечномерные алгебры Ли — I: полубесконечные формы, алгебра Вирасоро и вертексные операторы. М.: МЦНМО, МК НМУ, 1997. — 80 с.

Книга представляет собой расширенное издание материалов семинара, организованного авторами в осеннем семестре 1996–97 уч. г. Книга содержит описание представлений разнообразных бесконечномерных алгебр Ли (алгебры Гейзенберга, алгебры Вирасоро, алгебры полубесконечных матриц и других алгебр) в пространстве полубесконечных форм. Описываются и изучаются вертексные операторы и соотношения между ними. Также излагаются приложения построенной теории к задачам алгебры и комбинаторики.

Книга является первым томом задуманной авторами серии. Последующие тома будут посвящены представлениям аффинных алгебр, алгебр Каца–Муди и квантовых групп, с приложениями к конформной теории поля.

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования

Верстка В. Кордонский

Ответственный за выпуск В. Прасолов

Лицензия ЛР №071150 от 11.04.95 г
Подписано в печать 22.12.97 г. Тираж 300 экз.

МЦНМО
121019, Москва, Б. Власьевский пер., 11. Тел. 241–05–00

Содержание

Введение

Теория бесконечномерных алгебр Ли — сравнительно новая дисциплина. Основным стимулом к ее быстрому развитию в семидесятые годы послужили задачи математической физики, такие как теория точно решаемых двумерных статистических моделей. Параллельно развивалась теория квантовых групп, причем было обнаружено, что один из подходов к определению этого важного понятия связан с бесконечномерными алгебрами Ли. Кроме того, при построении конформной теории поля выявилась необходимость подробно изучить представления алгебры Вирасоро и алгебр токов.

За пятнадцать–двадцать лет своего развития теория бесконечномерных алгебр Ли накопила множество красивых и важных результатов. Знакомство с этими результатами в настоящее время совершенно необходимо каждому, кто занимается теорией представлений или математической физикой, и не будет лишним также и для математиков других специальностей. Однако освоение этой теории (как и, увы, любой незавершенной, развивающейся науки) затрудняется почти полным отсутствием учебных руководств, доступных неспециалистам. В связи с этим у авторов этой книги возникла идея семинара по бесконечномерным алгебрам Ли для студентов Независимого Московского Университета. Такой семинар был организован в 1996–97 учебном году; книга основана на материалах осеннего семестра.

«Пространство полубесконечных форм» впервые было использовано одним из авторов книги (Б.Л. Фейгиным) в совместных работах с Д.Б. Фуксом по классификации инвариантных дифференциальных операторов на окружности. Изучались представления алгебры Ли векторных полей на окружности в обобщенных тензорных полях веса λ (см. раздел 3.2 книги). Оказалось, что вместо внешних степеней этих представлений удобно рассматривать их полубесконечные внешние степени. В дальнейшем появился ряд вариантов понятия полубесконечной формы; они кратко описаны в последнем разделе этой книги. Появлением же своим на свет полубесконечные формы обязаны, вероятно, принадлежащей Дираку идее «заполненного вакуума». Дирак предложил считать, что физический вакуум представляет собой состояние, в котором на каждом уровне энергии, меньшем некоторого («нулевого»), находится электрон, а состояния с положительной энергией не заполнены. Если в системе появляется электрон с энергией $U > 0$, то мы воспринимаем это как один электрон с энергией U в вакууме. Можно также удалить из вакуума электрон с энергией $U < 0$ — это будет воспринято как появление античастицы (позитрона) с энергией $-U$ и противоположным зарядом. Если же учесть, что при обмене местами двух электронов (или позитронов, или позитрона с электроном) ψ-функция системы меняет знак, то ясно, что пространство полубесконечных форм является естественным пространством состояний конечных наборов электронов и позитронов.

Как уже отмечалось, развитие теории представлений бесконечномерных алгебр Ли было в значительной мере мотивировано потребностями физики. В этой книге, однако, физические приложения теории совершенно не затронуты. В равной мере у читателя не предполагается каких-либо познаний в этой области. Время от времени в книге используется физическая терминология (скажем, слова «заряд» и «энергия»), но читатель может воспринимать это просто как способ выражения.

Основной целью книги является построение аппарата, необходимого для исследования в дальнейшем (в последующих книгах задуманной авторами серии) представлений алгебры Вирасоро, других аффинных алгебр, алгебр Каца–Муди и квантовых групп. Авторы не могли, однако, оставить без внимания многочисленные «ответвления» излагаемой теории. Так, §1 посвящен одному из таких ответвлений — доказательству ряда знаменитых комбинаторных тождеств, в числе которых тождество Якоби (1.8), тождество Эйлера (1.10) и тождество Роджерса–Рамануджана (1.14). В последующих параграфах книги приводятся другие доказательства этих тождеств, использующие полубесконечные формы (доказательства тождества Якоби в начале §2) и вертексные операторы (доказательства тождеств Эйлера и Роджерса–Рамануджана в разделе 4.3).

Параграф 2 посвящен систематическому описанию пространства полубесконечных форм. В разделе 2.1 приводится его определение и вычисляется характер по отношению к двум естественным градуировкам — заряду и энергии. В разделах 2.3 и 2.4 описываются проективные представления в пространстве полубесконечных форм двух важных алгебр Ли — алгебры обобщенно-якобиевых матриц и алгебры V-конечных операторов. Необходимые сведения из теории представлений приводятся в разделе 2.2. Завершается §2 еще одним любопытным отступлением — изложением принадлежащего Тэйту чисто алгебраического доказательства того, что сумма вычетов мероморфной 1-формы на комплексной кривой равна нулю.

В §3 изучаются некоторые проективные представления алгебры Гейзенберга и алгебры Вирасоро. Эти алгебры являются подалгебрами центрального расширения алгебры обобщенно-якобиевых матриц, и поэтому в пространстве полубесконечных форм естественно возникают их представления — они рассматриваются в разделах 3.1 и 3.2. В разделе 3.3 представления алгебры Вирасоро строятся еще раз, через представление алгебры Гейзенберга. Возможность такого построения является первым проявлением «бозон-фермионной симметрии», составляющей основной предмет следующего параграфа. «Взаимоотношениям» построенных представлений посвящен раздел 3.4.

§4 посвящен вертексным операторам. В разделе 4.1 приводится их определение, доказывается существование и единственность, а также важные формулы (4.4) и (4.5). Соотношения между вертексными операторами описаны в разделе 4.2. Они позволяют в разделе 4.3, во-первых, «восстановить» пространство полубесконечных форм из семейства представлений алгебры Гейзенберга, во-вторых, получить представления в терминах вертексных операторов ряда важных алгебр (включая $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$), и, в-третьих, получить «гомологические» доказательства тождеств Эйлера и Роджерса–Рамануджана.

Библиографический комментарий

Авторы сожалеют, что не смогли снабдить книгу списком литературы. Причиной этого отчасти послужило то, что такой список был бы очень велик — по излагаемой тематике написаны сотни работ, в том числе обзорных. По-русски имеется монография В. Каца «Бесконечномерные алгебры Ли» (М., «Мир», 1993), которую, правда, трудно рекомендовать для первоначального знакомства с предметом. Следует также отметить книгу V. Kac, A.K. Raina «Bombay lectures on highest weight representations» (World Sci., Singapore, 1987 — лекции, прочитанные в бомбейском Тата-Институте). По комбинаторике основным источником для авторов послужила книга Г. Эндрюса «Теория разбиений» (М., «Наука», 1982), содержащая, в частности, большую часть материала §1.

§1. q-комбинаторика

Целью данного параграфа является доказательство некоторых комбинаторных фактов, необходимых в дальнейшем, а также доказательство нескольких известных тождеств, в том числе тождества Якоби (1.8) и тождества Роджерса–Рамануджана (1.14).

1.1. q-биномиальные коэффициенты

Назовем *q-факториалом* выражение $(q)_n \stackrel{\text{def}}{=} (1-q^n)\dots(1-q)$, где $n \in \mathbb{N}$, а q, по потребности, либо формальная переменная, либо (комплексное) число. Соответственно, *q-биномиальным коэффициентом* будем называть выражение $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{(q)_n}{(q)_k(q)_{n-k}}$. «Оправданием» этих определений служат (очевидные) равенства

$$\lim_{q\to 1} \frac{(q)_n}{(1-q)^n} = n!, \tag{1.1}$$

$$\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = C_n^k. \tag{1.2}$$

Пусть теперь $\mathbb{F}_q$ обозначает конечное поле из q элементов (здесь следует, конечно, предположить, что q — натуральное число, причем степень простого), и пусть V_n — n-мерное линейное пространство над $\mathbb{F}_q$. Имеет место

Предложение 1.1.

1. *Число k-реперов (упорядоченных наборов из k линейно независимых векторов) в V_n равно* $(-1)^k q^{k(k-1)/2} \dfrac{(q)_n}{(q)_{n-k}}$.
2. *Число k-мерных подпространств пространства V_n равно* $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.
3. *Число полных флагов подпространств пространства V_n равно* $\dfrac{(q)_n}{(1-q)^n}$.

Доказательство.

1. Будем выбирать векторы репера последовательно. Первый вектор можно выбрать любым, кроме нулевого — это дает $q^n - 1$ возможностей. Второй вектор не должен принадлежать прямой, натянутой на первый вектор — $q^n - q = q(q^{n-1} - 1)$ возможностей. Продолжая в том же духе, получим $(q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{n-k+1}) = (-1)^k q^{k(k-1)/2}\dfrac{(q)_n}{(q)_{n-k}}$ реперов.

2. Число k-мерных подпространств, очевидно, равно числу способов выбрать k-репер в V_n, деленному на число способов выбрать k-репер (т.е. базис) в самом подпространстве. По предыдущему пункту, это дает $\dfrac{(-1)^k q^{k(k-1)/2}(q)_n}{(-1)^k q^{k(k-1)/2}(q)_{n-k}(q)_k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ подпространств.

3. Каждому базису (т.е. n-реперу) пространства V_n очевидным образом сопоставляется флаг. При этом число базисов, которым сопоставляется данный флаг, равно $(q-1)(q^2-q)\dots(q^n - q^{n-1})$ (k-й вектор базиса должен принадлежать k-му пространству флага, но не должен принадлежать $(k-1)$-му). Теперь из формулы пункта 1 получаем, что число флагов равно $\dfrac{(-1)^n q^{n(n-1)/2}(q)_n}{(q-1)(q^2-q)\dots(q^n-q^{n-1})} = \dfrac{(q)_n}{(1-q)^n}$. □

Классическая формула «треугольника Паскаля» для q-биномиальных коэффициентов «раздваивается»:

Предложение 1.2. *Имеют место следующие равенства*:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q, \tag{1.3}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^{k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q. \tag{1.4}$$

Доказательство. Обе формулы легко проверяются прямым вычислением. Однако можно дать и комбинаторное их доказательство, опираясь на интерпретацию q-биномиальных коэффициентов, данную в предложении 1.1. Для этого нам потребуется

Лемма 1.1. *Число k-мерных подпространств пространства V_n, содержащих данное $(k-1)$-мерное пространство W_{k-1}, равно* $\dfrac{q^{n-k+1}-1}{q-1}$.

Доказательство леммы 1.1. Чтобы задать k-мерное пространство $W_k \supset W_{k-1}$, нужно выбрать в V_n вектор, не принадлежащий W_{k-1} (тогда W_k будет порождено W_{k-1} и этим вектором). Это можно сделать $q^n - q^{k-1}$ способами. Полученное W_k не изменится, если вектор умножить на ненулевую константу ($q-1$ вариант), и если к нему прибавить произвольный вектор из W_{k-1} (q^{k-1} вариант). Итого получаем $\dfrac{q^n - q^{k-1}}{(q-1)q^{k-1}} = \dfrac{q^{n-k+1}-1}{q-1}$. Лемма доказана. $\square$

Зафиксируем теперь $(n-1)$-мерное подпространство $V_{n-1} \subset V_n$. Для W_k есть две возможности: или $W_k \subset V_{n-1}$ (таких пространств $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$), или $W_k \cap V_{n-1} = W_{k-1}$. Способов выбрать W_{k-1} существует $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$, и каждый из них, согласно лемме 1.1, дает $\dfrac{q^{n-k+1}-1}{q-1} - \dfrac{q^{n-k}-1}{q-1} = q^{n-k}$ подпространств W_k (вычитание — потому что $W_k \not\subset V_{n-1}$).

Тем самым доказана формула (1.3). Формула (1.4) выводится из нее с использованием симметрии q-биномиальных коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-k \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ n-k-1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q.$$

$\square$

Формулы (1.3) и (1.4) позволяют расположить q-биномиальные коэффициенты в виде «q-треугольника Паскаля». Начальные строки его изображены на рис. 1.

Из формул (1.3) и (1.4) следует, в частности, что $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ — многочлен от q. Получим явное выражение для его коэффициентов.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1+q & & 1 & & \\
 & 1 & & 1+q+q^2 & & 1+q+q^2 & & 1 & \\
1 & & 1+q+q^2+q^3 & & 1+q+2q^2+q^3+q^4 & & 1+q+q^2+q^3 & & 1
\end{array}
$$

Рис. 1. q-треугольник Паскаля

Назовем *диаграммой Юнга* набор неубывающих положительных чисел: $\mathcal{D} = (l_1, \ldots, l_s)$, где $0 < l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_s$. Такую диаграмму часто изображают в виде s строк, содержащих, соответственно, $l_1, l_2, \ldots, l_s$ клеток (снизу вверх; см. примеры на рис. 2). Имеет место

Теорема 1.1. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum\limits_{m=0}^{n} q^m Y_m$, *где* Y_m *— число диаграмм Юнга из* m *клеток, помещающихся в прямоугольнике* $k \times (n-k)$.

Доказательство. В принципе, теорему можно доказать прямым вычислением (по индукции). Представляет, однако, интерес комбинаторное доказательство.

Рассмотрим разбиение грассманиана $G(k, F^n)$ (F — произвольное поле) на *клетки Шуберта*. Для этого зафиксируем в F^n флаг $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n$, в котором $\dim V_k = k$. Клетки Шуберта нумеруются диаграммами Юнга, помещающимися в прямоугольнике $k \times (n-k)$. Клетка $e(\mathcal{D})$, соответствующая диаграмме $\mathcal{D}$ из $s \leqslant n-k$ столбцов, состоит из всех подпространств

$W \subset F^n$, для которых при всех $1 \leqslant j \leqslant k+s$ и при всяком $k-l_j+j \leqslant l \leqslant k-l_{j+1}+j$ коразмерность $\operatorname{codim}_{V_l}(W \cap V_l)$ равна j. Клетка $e(\mathcal{D})$ гомеоморфна линейному пространству, размерность которого (над полем F) равна числу $\#\mathcal{D}$ клеток в диаграмме. Поэтому в случае грассманиана $G(k, \mathbb{F}_q^n)$ над конечным полем из q элементов клетки Шуберта будут конечными множествами — число элементов в клетке $e(\mathcal{D})$ равно $q^{\#\mathcal{D}}$. Но общее число элементов в грассманиане $G(k, \mathbb{F}_q^n)$ нам известно из предложения 1.1 — оно равно $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$. $\square$

Приведем еще одну комбинаторную интерпретацию q-биномиальных коэффициентов. Обычный биномиальный коэффициент C_n^k равен числу k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Припишем теперь каждому множеству натуральных чисел $\{a_1, \ldots, a_s\}$ вес, равный $q^{a_1+\cdots+a_s}$ (вес пустого множества будем считать равным 1), и обозначим $Z_n^k(q)$ сумму весов («статистическую сумму») всех k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда справедливо

Предложение 1.3.

$$Z_n^k(q) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k+1)/2}.$$

Доказательство. Очевидно, что предложение верно при $n = 0$ и $n = k$. Поэтому для доказательства достаточно проверить, что величина $q^{-k(k+1)/2} Z_n^k(q)$ удовлетворяет равенству (1.3). Разобьем k-элементные подмножества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на два типа — содержащие n и не содержащие n. Сумма весов подмножеств первого типа равна $q^n Z_{n-1}^{k-1}(q)$, а второго типа — $Z_{n-1}^k(q)$. Поэтому $Z_n^k(q) = Z_{n-1}^k(q) + q^n Z_{n-1}^{k-1}(q)$, что и означает требуемое. $\square$

Выведем теперь q-аналог формулы бинома Ньютона. Начнем со случая натурального показателя. Обозначим $(1+z)^n|_q \stackrel{\text{def}}{=}$ $\stackrel{\text{def}}{=} (1+z)(1+zq)\ldots(1+zq^{n-1})$.

Предложение 1.4.

$$(1+z)^n|_q = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q z^k q^{k(k-1)/2}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Индукция по n: нужно раскрыть скобки в равенстве $(1+z)^{n+1}|_q = (1+z)^n|_q(1+zq^n)$ и воспользоваться формулой (1.3). $\square$

Для произвольного показателя степени α положим по определению

$$(1+z)^\alpha|_q = \frac{(1+z)(1+zq)\ldots}{(1+zq^\alpha)(1+zq^{\alpha+1})\ldots}.$$

Нам будет технически удобнее сперва доказать не аналог формулы (1.5), а несколько более общий факт — следующую формулу Коши:

Предложение 1.5.

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)^n|_q}{(q)_n} t^n = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1-atq^m}{1-tq^m}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Непосредственным вычислением проверяется, что и левая, и правая часть соотношения (1.6) удовлетворяет функциональному уравнению $F(t)(1-t) = F(tq)(1-at)$. Но это уравнение и начальное условие $F(0)=1$ однозначно определяют как разложение $F(t)$ в ряд, так и ее разложение в бесконечное произведение. $\square$

Формула Коши, примененная к $t=-zq^\alpha$ и $a=q^{-\alpha}$, дает следующую формулу q-бинома с произвольным показателем:

$$(1+z)^\alpha|_q = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k-1)/2} \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha-1})\ldots(1-q^{\alpha-k+1})}{(q)_n} z^k. \tag{1.7}$$

Формула (1.7) обобщает (1.5), и поэтому входящую в нее дробь естественно называть $\begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix}_q$.

1.2. Тождество Якоби

Нашей целью в этом разделе будет доказательство *тождества Якоби*:

Теорема 1.2.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} x^k = \prod_{m=0}^{\infty} (1-q^{2m+2})(1-q^{2m+1}/x)(1-q^{2m+1}x). \tag{1.8}$$

Для доказательства (1.8) нам потребуется следующая лемма («конечная форма тождества Якоби»):

Лемма.

$$\sum_{k=-n}^{n} (-1)^k q^{k^2} x^k \begin{bmatrix} 2n \\ n+k \end{bmatrix}_{q^2} = (1-q/x)(1-q^3/x)\dots(1-q^{2n-1}/x) \times \\ \times (1-qx)(1-q^3x)\dots(1-q^{2n-1}x). \tag{1.9}$$

Доказательство леммы.

$$\begin{aligned} &(1-q/x)(1-q^3/x)\dots(1-q^{2n-1}/x)(1-qx)(1-q^3x)\dots(1-q^{2n-1}x) = \\ &\quad = (-1)^n q^{n^2} x^{-n} (1-x/q^{2n-1})\dots(1-x/q^3)(1-x/q) \times \\ &\qquad \times (1-qx)(1-q^3x)\dots(1-q^{2n-1}x) = \\ &\quad = (-1)^n q^{n^2} x^{-n} (1-x/q^{2n-1})^{2n}|_{q^2} = \text{ (по формуле (1.5))} \\ &\quad = (-1)^n q^{n^2} x^{-n} \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j q^{j(j-1)} \begin{bmatrix} 2n \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \left(\frac{x}{q^{2n-1}}\right)^j = \\ &\qquad\qquad = \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k q^{k^2} x^k \begin{bmatrix} 2n \\ n+k \end{bmatrix}_{q^2} \end{aligned}$$

(в последней строчке произведена замена $k = j - n$). $\square$

Доказательство теоремы. Перейдем в равенстве (1.9) к пределу при $n \to \infty$ и заметим, что при этом $\begin{bmatrix} 2n \\ n+k \end{bmatrix}_{q^2} \to$ $\to \prod_{m=0}^{\infty} (1-q^{2m+2})^{-1}$. $\square$

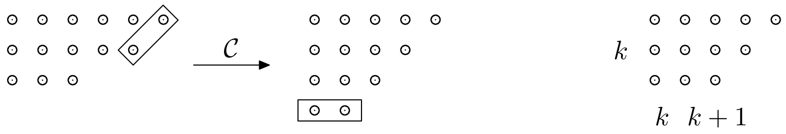

Рис. 2. Преобразование на множестве диаграмм Юнга

1.3. Тождество Эйлера

Подставляя в тождестве Якоби $q \mapsto q^{3/2}$, $x \mapsto q^{1/2}$, получим следующее тождество Эйлера:

$$\prod_{m=0}^{\infty}(1-q^m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{(3k^2+k)/2} =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(q^{(3k^2-k)/2} + q^{(3k^2+k)/2}\right). \quad (1.10)$$

Ввиду важности этого тождества приведем другие его доказательства. Начнем с прямого комбинаторного рассуждения.

Рассмотрим диаграмму Юнга со строками попарно различной высоты $l_1 < \ldots < l_k$ и припишем ей знак $(-1)^k$. Заметим, что после раскрытия скобок в левой части равенства (1.10) коэффициент при q^s равен сумме знаков всех диаграмм Юнга из s клеток. Утверждение заключается в том, что эта сумма равна $(-1)^k$, если $s = (3k^2 \pm k)/2$, и нулю, если s не имеет такого вида.

Определим на множестве диаграмм Юнга без одинаковых строк такое преобразование $\mathcal{C}$ (см. рис. 2a): срежем крайнюю правую диагональ и приставим ее к диаграмме в качестве самой нижней строки. Разумеется, $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ определено не для каждой диаграммы $\mathcal{D}$ — необходимо, чтобы длина крайней правой диагонали была меньше длины самой нижней строки. Нетрудно видеть, что если $\mathcal{D}_2 = \mathcal{C}(\mathcal{D}_1)$, то $\mathcal{C}(\mathcal{D}_2)$ не определена. Тем самым, диаграммы Юнга из s клеток (и без одинаковых строк) разбиваются на три непересекающихся множества: A_1 — область определения преобразования $\mathcal{C}$, $A_2 = \mathcal{C}(A_1)$ — область его значений, и A_3 — все остальные диаграммы из s клеток. Преобразование $\mathcal{C}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между A_1 и A_2 и меняет знак диаграммы. Поэтому коэффициент при q^s в левой части равен сумме знаков диаграмм, принадлежащих A_3. Но для каждого числа k столбцов существуют, как нетрудно видеть, только две диаграммы, принадлежащие A_3 — см. рис. 2*б*. Они содержат $s = (3k^2 - k)/2$ и $s = (3k^2 + k)/2$ клеток соответственно, что и завершает доказательство формулы (1.10).

То же самое доказательство можно изложить на другом языке — языке цепных комплексов. Определим комплекс $\mathcal{Y}$, пространство $\mathcal{Y}_k$ которого порождено диаграммами Юнга из k различных строк. Дифференциал d сопоставляет диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{Y}_k$ диаграмму $\mathcal{C}(\mathcal{D}) \in \mathcal{Y}_{k+1}$, если таковая определена, а если нет, то сопоставляет $\mathcal{D}$ нуль. Последнее условие обеспечивает выполнение равенства $d^2 = 0$. Поскольку дифференциал d сохраняет число клеток в диаграмме, комплекс $\mathcal{Y}$ распадается в прямую сумму подкомплексов $\mathcal{Y} = \bigoplus\limits_{s=0}^{\infty} \mathcal{Y}^{(s)}$, где подкомплекс $\mathcal{Y}^{(s)}$ порожден диаграммами из s клеток. Предыдущее рассуждение показывает, что гомологии комплексов устроены так:

$$\dim H_k(\mathcal{Y}^{(s)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } s = (3k^2 \pm k)/2, \\ 0 & \text{для остальных } k. \end{cases}$$

Применяя к комплексу $\mathcal{Y}^{(s)}$ тождество Эйлера–Пуанкаре, получим:

$$\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \dim \mathcal{Y}_l^{(s)} = \begin{cases} (-1)^k, & \text{если } s = (3k^2 \pm k)/2, \\ 0 & \text{для остальных } s. \end{cases}$$

Умножая полученное равенство на q^s и суммируя по s, получим тождество Эйлера (1.10).

Наконец, рассмотрим доказательство, основанное на свойствах q-биномиальных коэффициентов и аналогичное доказательству тождества Роджерса–Рамануджана, которое мы рассмотрим в следующем разделе. Для этого доказательства нам потребуется следующая лемма («конечная форма» тождества Эйлера):

Лемма 1.2. *Имеет место следующее равенство*:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{(3k^2+k)/2}\begin{bmatrix} n+1 \\ [(n+1-3k)/2] \end{bmatrix}_q = 1. \qquad (1.11)$$

Квадратные скобки внутри символа q-биномиального коэффициента означают целую часть. Здесь и в дальнейшем мы полагаем $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = 0$, если $m < 0$ или $m > n$ — это позволяет нам не заботиться о границах суммирования.

Доказательство. Обозначим $a_n(q)$ левую часть равенства (1.11). Пусть $n+1 = 2l$ четно (для нечетного случая рассуждения аналогичны). Тогда, группируя члены с четным $k = 2s$ и нечетным $k = 2s-1$, получим:

$$a_n(q) = \sum_s \left(q^{6s^2+s}\begin{bmatrix} 2l \\ l-3s \end{bmatrix}_q - q^{6s^2-5s+1}\begin{bmatrix} 2l \\ l-3s+1 \end{bmatrix}_q \right) =$$

$$\overset{\text{по (1.3) и (1.4)}}{=} \sum_s \left(q^{6s^2+s}\left(q^{l-3s}\begin{bmatrix} 2l-1 \\ l-3s \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} 2l-1 \\ l-3s-1 \end{bmatrix}_q \right) - \right.$$

$$\left. - q^{6s^2-5s+1}\left(q^{l+3s-1}\begin{bmatrix} 2l-1 \\ l-3s \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} 2l-1 \\ l-3s+1 \end{bmatrix}_q \right)\right) =$$

$$= \sum_s \left(q^{6s^2+s}\begin{bmatrix} 2l-1 \\ l-3s-1 \end{bmatrix}_q - q^{6s^2-5s+1}\begin{bmatrix} 2l-1 \\ l-3s+1 \end{bmatrix}_q \right) = a_{n-1}(q).$$

Осталось заметить, что $a_0(q) = 1$. $\square$

Формула (1.10) получается теперь почленным переходом в (1.11) к пределу при $n \to \infty$ — при этом $\begin{bmatrix} n+1 \\ [(n+1-3k)/2] \end{bmatrix}_q \to$ $\to \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^m}$.

1.4. Тождество Роджерса–Рамануджана

Назовем *q-последовательностью Фибоначчи* последовательность многочленов $f_n(q)$, удовлетворяющую рекуррентному соотношению $f_n(q) = f_{n-1}(q) + q^n f_{n-2}(q)$ и начальным условиям $f_0 = 1$, $f_1 = 1 + q$.

Предложение 1.6.

1. *Статистическая сумма (сумма весов) конечных множеств, состоящих из чисел от* 1 *до* n*, и не содержащих соседних чисел, равна* $f_n(q)$.

2. *Имеет место формула* $f_n(q) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} n+1-k \\ k \end{bmatrix}_q q^{k^2}$.

Доказательство.

1. Обозначим искомую статсумму $\varphi_n(q)$. Очевидно, $\varphi_0(q) = 1$ и $\varphi_1(q) = 1 + q$. Всякое множество либо содержит n и еще, возможно, какие-то числа, не превосходящие $n - 2$, либо же состоит целиком из чисел, не превосходящих $n - 1$. Отсюда $\varphi_n(q) = q^n \varphi_{n-2}(q) + \varphi_{n-1}(q)$, и, по индукции, $\varphi_n(q) = f_n(q)$.

2. Рассмотрим множество $P_k = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$, не содержащее соседних чисел. Мы будем считать, что $p_1 < \ldots < p_k$. Тогда все числа $p_1, p_2 - 1, \ldots, p_k - k + 1$ различны, и мы можем рассмотреть множество $P'_k = \{p_1, p_2 - 1, \ldots, p_k - k + 1\} \subset \subset \{1, \ldots, n - k + 1\}$. Сопоставление $P_k \leftrightarrow P'_k$ определяет взаимно однозначное соответствие между k-элементными подмножествами множества $\{1, \ldots, n-k+1\}$ и k-элементными подмножествами множества $\{1, \ldots, n\}$, не содержащими соседних чисел. Нужная формула теперь прямо следует из результата пункта 1, предложения 1.3 и того факта, что веса множеств P_k и P'_k отличаются на множитель $q^{k(k-1)/2}$. $\square$

Наша цель состоит в том, чтобы доказать тождество Роджерса–Рамануджана (1.14). Следующее предложение («конечная форма» этого тождества) является ключевым шагом в доказательстве.

Предложение 1.7. *Имеет место формула:*

$$f_n(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k+1)/2} \begin{bmatrix} n+1 \\ [(n+1-5k)/2] \end{bmatrix}_q . \tag{1.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим правую часть формулы (1.12) $\varphi_n(q)$ и докажем, что она удовлетворяет начальным условиям и рекуррентному соотношению для q-чисел Фибоначчи. Равенства $\varphi_0 = 1$ и $\varphi_1 = 1 + q$ проверяются непосредственно. Для доказательства соотношения $\varphi_n(q) = q^n \varphi_{n-2}(q) + \varphi_{n-1}(q)$ обозначим $a_k^n = [(n+1-5k)/2]$ и заметим, что

$$a_k^{n-1} = \begin{cases} a_k^n - 1, & \text{если } n-5k \text{ нечетно,} \\ a_k^n, & \text{если } n-5k \text{ четно.} \end{cases} \tag{1.13}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_n(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k+1)/2} \begin{bmatrix} n+1 \\ a_k^n \end{bmatrix}_q &= \\ &\overset{\text{по (1.4)}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k+1)/2} \left(\begin{bmatrix} n \\ a_k^n - 1 \end{bmatrix}_q + q^{a_k^n} \begin{bmatrix} n \\ a_k^n \end{bmatrix}_q \right) = \\ &\overset{\text{по (1.3)}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k+1)/2} \times \\ &\quad \times \left(\begin{bmatrix} n \\ a_k^n - 1 \end{bmatrix}_q + q^{a_k^n} \begin{bmatrix} n-1 \\ a_k^n \end{bmatrix}_q + q^n \begin{bmatrix} n-1 \\ a_k^n - 1 \end{bmatrix}_q \right) = \\ &\overset{\text{по (1.13)}}{=} q^n \varphi_{n-2}(q) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k+1)/2} \times \\ &\quad \times \left(\begin{bmatrix} n \\ a_k^n - 1 \end{bmatrix}_q + q^{a_k^n} \begin{bmatrix} n-1 \\ a_k^n \end{bmatrix}_q \right). \end{aligned}$$

Таким образом, нужно доказать, что второй член равен

$\varphi_{n-1}(q)$, т.е. доказать равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k(5k+1)/2}\left(\begin{bmatrix} n \\ a_k^n-1\end{bmatrix}_q + q^{a_k^n}\begin{bmatrix} n-1 \\ a_k^n\end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} n \\ a_k^{n-1}\end{bmatrix}_q\right)=0.$$

Разобьем эту сумму на две — по k, для которых $n-5k$ нечетно, и по k, для которых $n-5k$ четно:

$$S_1 \overset{\text{по (1.13)}}{=} \sum_{\substack{n-5k \\ \text{нечетно}}}(-1)^k q^{k(5k+1)/2}\times$$

$$\times\left(\begin{bmatrix} n \\ a_k^n-1\end{bmatrix}_q + q^{a_k^n}\begin{bmatrix} n-1 \\ a_k^n\end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} n \\ a_k^n-1\end{bmatrix}_q\right)=$$

$$= \sum_{\substack{n-5k \\ \text{нечетно}}}(-1)^k q^{k(5k+1)/2+a_k^n}\begin{bmatrix} n-1 \\ a_k^n\end{bmatrix}_q,$$

$$S_2 \overset{\text{по (1.13)}}{=} \sum_{\substack{n-5k \\ \text{четно}}}(-1)^k q^{k(5k+1)/2}\times$$

$$\times\left(\begin{bmatrix} n \\ a_k^n-1\end{bmatrix}_q + q^{a_k^n}\begin{bmatrix} n-1 \\ a_k^n\end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} n \\ a_k^n\end{bmatrix}_q\right)=$$

$$\overset{\text{по (1.4)}}{=} \sum_{\substack{n-5k \\ \text{четно}}}(-1)^k q^{k(5k+1)/2}\times$$

$$\times\left(\begin{bmatrix} n \\ a_k^n-1\end{bmatrix}_q + q^{a_k^n}\begin{bmatrix} n-1 \\ a_k^n\end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} n-1 \\ a_k^n-1\end{bmatrix}_q - q^{a_k^n}\begin{bmatrix} n-1 \\ a_k^n\end{bmatrix}_q\right)=$$

$$= \sum_{\substack{n-5k \\ \text{четно}}}(-1)^k q^{k(5k+1)/2}\left(\begin{bmatrix} n \\ a_k^n-1\end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} n-1 \\ a_k^n-1\end{bmatrix}_q\right).$$

Сделаем во второй сумме замену $k \mapsto k-1$ и будем суммировать только по таким k, для которых $n-5k$ нечетно. В этом случае $a^n_{k-1} = a^n_k + 2$, поэтому общая сумма равна

$$\sum_{\substack{n-5k\\ \text{нечетно}}} (-1)^k q^{k(5k+1)/2+a^n_k} \begin{bmatrix} n-1 \\ a^n_k \end{bmatrix}_q +$$

$$+ (-1)^{k-1} q^{(k-1)(5k-4)/2} \left(\begin{bmatrix} n \\ a^n_{k-1}-1 \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} n-1 \\ a^n_{k-1}-1 \end{bmatrix}_q \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n-5k\\ \text{нечетно}}} (-1)^k q^{k(5k+1)/2+a^n_k} \begin{bmatrix} n-1 \\ a^n_k \end{bmatrix}_q -$$

$$- (-1)^k q^{(k-1)(5k-4)/2} \left(\begin{bmatrix} n \\ a^n_k+1 \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} n-1 \\ a^n_k+1 \end{bmatrix}_q \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n-5k\\ \text{нечетно}}} (-1)^k \Biggl(q^{k(5k+1)/2+a^n_k} \begin{bmatrix} n-1 \\ a^n_k \end{bmatrix}_q - q^{(k-1)(5k-4)/2} \begin{bmatrix} n-1 \\ a^n_k+1 \end{bmatrix}_q +$$

$$+ q^{(k-1)(5k-4)/2} \begin{bmatrix} n-1 \\ a^n_k+1 \end{bmatrix}_q - q^{(k-1)(5k-4)/2+n-a^k_n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ a^n_k \end{bmatrix}_q \Biggr) =$$

$$= \sum_{\substack{n-5k\\ \text{нечетно}}} (-1)^k \begin{bmatrix} n-1 \\ a^n_k \end{bmatrix}_q (q^{k(5k+1)/2+a^n_k} - q^{(k-1)(5k-4)/2+n-a^k_n-1}) = 0$$

в силу равенства $2a^n_k = n + (k-1)(5k-4)/2 - k(5k+1)/2 - 1$, которое выполнено, если $n-5k$ нечетно. $\square$

Вычисления, проведенные в предыдущем доказательстве, можно изобразить графически — см. рис. 3. Нужно доказать, что построчные суммы обведенных кружком элементов q-треугольника Паскаля, взятых с надлежащим весом, удовлетворяют тождеству для q-чисел Фибоначчи. Вся картина разбивается на шестиугольные фрагменты (один из них обведен на рисунке); вычисления ведутся в каждом из них по отдельности. На рис. 3 предполагается, что n четно; для нечетного n картина симметричная. Вначале к элементам нижней строки, обведенным

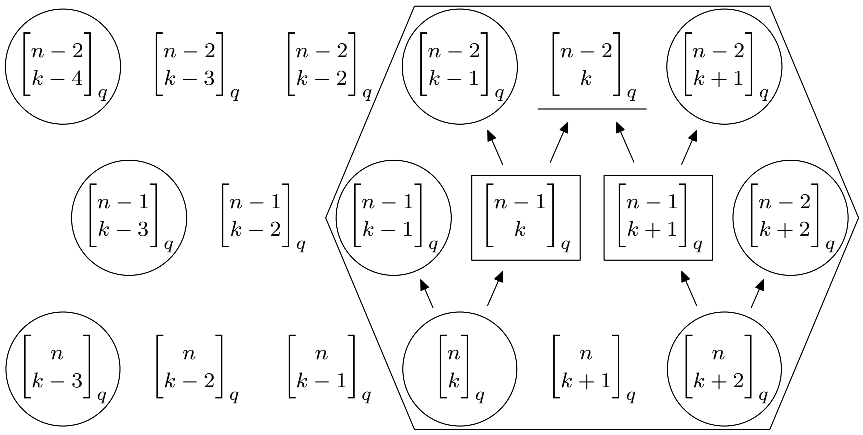

Рис. 3. Конечная форма тождества Роджерса–Рамануджана

кружком, применяется формула (1.4). Получается сумма, содержащая элементы средней строки с некоторыми весами. Элементы, обведенные кружком, остаются как есть (они войдут в окончательную формулу), а элементы, заключенные в прямоугольник, раскладываются еще раз — по формуле (1.3). При этом получается взвешенная сумма, содержащая элементы верхней строки. Для доказательства нужно проверить (в этом и заключаются вычисления), что все элементы входят в сумму с надлежащим весом — вес элементов, обведенных кружком, дается формулой Роджерса–Рамануджана и тождеством для q-чисел Фибоначчи, а вес подчеркнутого элемента должен быть равен нулю.

Заметим теперь, что характер рекуррентного соотношения для q-чисел Фибоначчи таков, что $f_n(q)$ отличается от предыдущих членов лишь на слагаемое, содержащее q^n. Поэтому существует предел (в топологии пространства формальных рядов, т.е. покомпонентно) $f_\infty(q) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(q)$. Предложения 1.6 и 1.7 позволяют теперь доказать основной результат этого раздела:

Теорема 1.3. *Выполнено тождество*:

$$f_\infty(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(q)_k} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5m+1})(1-q^{5m+4})}. \tag{1.14}$$

Второе равенство и называется тождеством Роджерса–Рамануджана.

Доказательство. Из предложения 1.6 (пункт 2) следует, что $f_\infty(q) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} \lim\limits_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n+1-k \\ k \end{bmatrix}_q = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(q)_k}$ (члены с $k<0$ равны нулю). Тем самым первое равенство доказано.

Перейдем теперь к пределу в равенстве (1.12):

$$f_\infty(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k+1)/2} \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n+1 \\ [(n+1-5k)/2] \end{bmatrix}_q =$$

$$= \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k+1)/2} =$$

(по тождеству Якоби (1.8) с $q \mapsto q^{5/2}$, $x \mapsto q^{1/2}$)

$$= \prod_{m=0}^{\infty} \frac{(1-q^{5m})(1-q^{5m+3})(1-q^{5m+2})}{1-q^m} =$$

$$= \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5m+1})(1-q^{5m+4})}. \quad \square$$

Следствие. *Количество представлений натурального числа k в виде (неупорядоченной) суммы слагаемых, каждые два из которых отличаются не менее чем на* 2, *равно количеству представлений числа k в виде (неупорядоченной) суммы слагаемых, каждое из которых дает при делении на* 5 *остаток* 1 *или* 4.

Доказательство. Сравним коэффициенты при q^k в левой и правой части равенства (1.14) и воспользуемся пунктом 1 Предложения 1.6. $\square$

Рассматривая q-последовательность Фибоначчи g_n с начальными членами $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, можно аналогично предложению 1.7

получить для g_n такое выражение:

$$g_n(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k-3)/2} \begin{bmatrix} n+1 \\ [(n+1-5k)/2]+1 \end{bmatrix}_q, \tag{1.15}$$

откуда вытекает *второе тождество Роджерса–Рамануджана*:

Теорема 1.4. *Имеет место тождество*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2+k}}{(q)_k} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5m+2})(1-q^{5m+3})}. \tag{1.16}$$

Количество представлений натурального числа k в виде (неупорядоченной) суммы слагаемых, каждое из которых больше 1 и каждые два из которых отличаются не менее чем на 2, равно количеству представлений числа k в виде (неупорядоченной) суммы слагаемых, каждое из которых дает при делении на 5 остаток 2 или 3.

§2. Пространство полубесконечных форм

2.1. Определение и основные свойства

Назовем множество $\mathfrak{M} \subset \mathbb{Z}$ *дираковским*, если множества $\mathfrak{M}_e = \mathfrak{M} \cap \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $\mathfrak{M}_p = \mathbb{Z}_{<0} \setminus \mathfrak{M}$ конечны. Множества $\mathfrak{M}_e$ и $\mathfrak{M}_p$ будем называть, соответственно, *электронной* и *позитронной* компонентой множества $\mathfrak{M}$. Величину $C(\mathfrak{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \#(\mathfrak{M}_e) - \#(\mathfrak{M}_p)$ назовем *зарядом*, а величину $U(\mathfrak{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{a \in \mathfrak{M}_e \cup \mathfrak{M}_p} |a|$ — *энергией* множества $\mathfrak{M}$. *Пространством полубесконечных форм* назовем линейное пространство $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$, базис которого составляют выражения $\psi_{\mathfrak{M}} = \dots \wedge f_{i_n} \wedge f_{i_{n-1}} \wedge \dots \wedge f_{i_1}$, в которых $i_1 > i_2 > \dots$ и набор индексов $\mathfrak{M} = \{i_k\}$ — дираковское множество. Мы будем говорить об энергии и заряде базисного вектора $\dots \wedge f_{i_n} \wedge f_{i_{n-1}} \wedge \dots \wedge f_{i_1}$, имея в виду энергию и заряд соответствующего множества индексов.

Нашей ближайшей целью будет вычисление характера пространства $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$ относительно C и U, т.е. величины

$$F(t,q) = \sum_{\substack{\text{по всем дираковским} \\ \text{множествам } \mathfrak{M} = \{i_k\}}} t^{C(\mathfrak{M})} q^{U(\mathfrak{M})}.$$

Для этого введем в рассмотрение такие величины:

$$F_+(t,q) = \sum_{\substack{\text{по всем дираковским} \\ \text{множествам } \mathfrak{M} = \{i_k\} \text{ с } \mathfrak{M}_p = \varnothing}} t^{C(\mathfrak{M})} q^{U(\mathfrak{M})},$$

$$F_-(t,q) = \sum_{\substack{\text{по всем дираковским} \\ \text{множествам } \mathfrak{M} = \{i_k\} \text{ с } \mathfrak{M}_e = \varnothing}} t^{C(\mathfrak{M})} q^{U(\mathfrak{M})}.$$

Предложение 2.1. *Имеют место следующие формулы:*

$$F_+(t,q)=\prod_{m=0}^{\infty}(1+tq^m)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k\frac{q^{k(k-1)/2}}{(q)_k}, \tag{2.1}$$

$$F_-(t,q)=\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^m/t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^{-k}\frac{q^{k(k+1)/2}}{(q)_k}, \tag{2.2}$$

$$F(t,q)=F_+(t,q)F_-(t,q). \tag{2.3}$$

Доказательство. Левое равенство в формуле (2.1) очевидно. Правое равенство получается из формулы (1.5) переходом к пределу при $n\to\infty$. Формула (2.2) доказывается аналогично.

Введем теперь для произвольного дираковского множества $\mathfrak{M}$ множества $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$ такие, что $(\mathfrak{M}_+)_e=\mathfrak{M}_e$, $(\mathfrak{M}_+)_p=\varnothing$, $(\mathfrak{M}_-)_p=\mathfrak{M}_p$, $(\mathfrak{M}_-)_e=\varnothing$, и заметим, что $C(\mathfrak{M})=C(\mathfrak{M}_+)+$ $+C(\mathfrak{M}_-)$ и $U(\mathfrak{M})=U(\mathfrak{M}_+)+U(\mathfrak{M}_-)$. Из этих двух равенств и того факта, что дираковское множество однозначно определяется своей электронной и позитронной компонентой, немедленно вытекает формула (2.3). $\square$

Формулу для $F(t,q)$ можно получить и другим способом. Для этого рассмотрим величину

$$F_N(t,q)=\sum_{\substack{\text{по всем дираковским множествам } \mathfrak{M}=\{i_k\},\\ \text{содержащим все числа, не превосходящие } -N.}} t^{C(\mathfrak{M})}q^{U(\mathfrak{M})}.$$

Предложение 2.2. *Имеют место формулы*

$$F_N(t,q)=\sum_{k=-N+1}^{\infty}t^k\frac{q^{k(k-1)/2}}{(q)_{k+N-1}}, \tag{2.4}$$

$$F(t,q)=\frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}t^nq^{n(n-1)/2}}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-q^k)}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование, сопоставляющее дираковскому множеству $\mathfrak{M} = \{i_k\}$ дираковское множество $\mathfrak{M}_N = \{i_k + N\}$. Легко заметить, что при этом $C(\mathfrak{M}_1) = C(\mathfrak{M})+1$ и $U(\mathfrak{M}_1) = U(\mathfrak{M})+C(\mathfrak{M})+1$, откуда, по индукции, $C(\mathfrak{M}_N) = C(\mathfrak{M})+N$ и $U(\mathfrak{M}_N) = U(\mathfrak{M})+NC(\mathfrak{M})+N(N+1)/2$. Дираковское множество $\mathfrak{M}$ содержит все числа, не превосходящие $-N$, тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{M}_{N-1})_p = \varnothing$. Из этого вытекает равенство

$$F_+(t,q) = t^{N-1}q^{N(N-1)/2}F_N(tq^N, q),$$

и, следовательно,

$$F_N(t,q) = \frac{q^{(N-1)(N-2)/2}}{t^{N-1}}F_+(t/q^{N-1}, q) = \overset{\text{по (2.1)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} t^{k-N+1}\,\frac{q^{k(k-1)/2+(N-1)(N-2)/2-k(N-1)}}{(q)_k} = \sum_{k=-N+1}^{\infty} t^k\frac{q^{k(k-1)/2}}{(q)_{k+N-1}}.$$

Формула (2.4) доказана. Формула (2.5) получается из нее переходом к пределу при $N \to \infty$. $\square$

Сравнивая коэффициенты при t^n в (2.3) и (2.5), получаем

Следствие. *Для любого $n \geqslant 0$ имеет место формула*

$$\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-q^k)} = \sum_{s=0}^{n}\frac{q^{s(s-n)}}{(q)_s(q)_{n-s}}.$$

Сравнивая же формулы (2.3) и (2.5) как целое, получим:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)F(t,q) \overset{\text{по (2.5)}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n q^{n(n-1)/2} = \overset{\text{по (2.1)–(2.3)}}{=} \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)\prod_{m=0}^{\infty}(1+tq^m)\prod_{l=1}^{\infty}(1+q^l/t).$$

Подставляя в полученное равенство $q \mapsto q^2$, $t \mapsto -xq$, получим формулу Якоби (1.8).

Пространство полубесконечных форм не является алгеброй, но на нем естественно действуют многие интересные алгебры. Перейдем к описанию этих действий.

Оператор, который действует на базисный вектор $\psi_{\mathfrak{M}} = = \cdots \wedge f_{i_n} \wedge f_{i_{n-1}} \wedge \cdots \wedge f_{i_1}$ умножением справа на f_i, мы обозначим просто f_i. После действия получается «бесконечное косое произведение», в котором, однако, индексы при f не обязательно идут в порядке возрастания — последний индекс (i) может не быть наибольшим и может встречаться дважды. В этом случае нужно как бы считать, что $\wedge$ действительно является кососимметрическим умножением — переставить f_i на подобающее место, соответственно изменив знак (а если f_i уже встречался в $\psi_{\mathfrak{M}}$, то положить результат равным нулю). Действие оператора f^*_{-i} на базисный вектор $\psi_{\mathfrak{M}}$ определим как «дифференцирование по f_i» (обратите внимание на индексы!): если f_i не входит в $\psi_{\mathfrak{M}}$, то результат равен нулю, а если входит, то его следует перенести на последнее место (соответственно изменив знак) и вычеркнуть.

Первая алгебра, представление которой в пространстве полубесконечных форм мы собираемся построить — бесконечномерная алгебра Клиффорда. Напомним ее определение. Пусть W — линейное пространство (конечно- или бесконечномерное), $\{e_\alpha\}$ — его базис. Предположим, что пространство снабжено симметрической билинейной формой $(\cdot,\cdot)$. Тогда алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}(W,(\cdot,\cdot))$ — ассоциативная алгебра с единицей, задаваемая образующими $\{e_\alpha\}$ и соотношениями

$$e_\alpha e_\beta + e_\beta e_\alpha = (e_\alpha, e_\beta). \tag{2.6}$$

Нетрудно видеть, что от выбора базиса $\{e_\alpha\}$ алгебра не зависит.

Рассмотрим пространство V, базис в котором составляют элементы $f_i\,(i \in \mathbb{Z})$, и пространство V^* с базисом f_i^*. На $V \oplus V^*$

определим билинейную форму $\langle\cdot,\cdot\rangle$ равенствами

$$\begin{gathered}\langle f_i, f_j\rangle = \langle f_i^*, f_j^*\rangle = 0,\\ \langle f_i, f_j^*\rangle = \begin{cases}1, & i+j=0,\\ 0, & i+j\neq 0.\end{cases}\end{gathered}\tag{2.7}$$

Рассмотрим теперь алгебру Клиффорда $A = \mathrm{Cl}(V\oplus V^*, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Предложение 2.3. *Операторы f_i и f_i^* образуют неприводимое представление алгебры A в пространстве $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$.*

Доказательство. Легко проверить непосредственно, что выполнены соотношения

$$f_\alpha f_\beta + f_\beta f_\alpha = f_\alpha^* f_\beta^* + f_\beta^* f_\alpha^* = 0, \quad f_\alpha f_\beta^* + f_\beta^* f_\alpha = \begin{cases}1, & \alpha+\beta=0,\\ 0, & \alpha+\beta\neq 0,\end{cases}\tag{2.8}$$

и, тем самым, имеется представление алгебры A. Неприводимость следует из того, что каждый вектор стандартного базиса может быть получен применением операторов f_i, f_i^* к *вакуумному вектору* $v = \cdots\wedge f_{-2}\wedge f_{-1}$. $\square$

Следствие. *Линейный оператор $A\colon \Lambda^{\frac{\infty}{2}} \to \Lambda^{\frac{\infty}{2}}$, коммутирующий со всеми операторами f_i, f_i^*, является оператором умножения на число.*

2.2. Проективные представления алгебр

Этот раздел — служебный. Мы изложим здесь некоторые понятия общей теории представлений, необходимые нам в дальнейшем.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, W — линейное пространство. *Проективным представлением* $\mathfrak{g}$ в пространстве W называется гомоморфизм алгебр Ли $\mu\colon \mathfrak{g}\to \mathrm{End}(W)/\mathbb{C}\mathrm{Id}$. Для проективного представления μ всегда определено (хотя и неоднозначно) его *поднятие* $\widetilde{\mu}$ — отображение $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(W)$, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "\tilde{\mu}"] \arrow[dr, "\mu"'] & & \mathrm{End}(W) \arrow[dl] \\ & \mathrm{End}(W)/\mathbb{C}\mathrm{Id}\,. & \end{tikzcd}$$

Разумеется, $\widetilde{\mu}$ не будет гомоморфизмом: для него существует такая билинейная кососимметрическая функция $\omega\colon \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, что

$$[\widetilde{\mu}_A, \widetilde{\mu}_B] = \widetilde{\mu}_{[A,B]} + \omega(A, B)\,\mathrm{Id}\,. \tag{2.9}$$

Два поднятия $\widetilde{\mu}^{(1)}$ и $\widetilde{\mu}^{(2)}$ соответствуют одному и тому же проективному представлению μ, если найдется такой линейный функционал $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, что $\widetilde{\mu}^{(2)}_A = \widetilde{\mu}^{(1)}_A + \varphi(A)\,\mathrm{Id}$.

Лемма 2.1. *Условие* (2.9) *задает поднятие некоторого проективного представления* μ *тогда и только тогда, когда функция* ω *является* 2*-коциклом алгебры Ли* $\mathfrak{g}$*, т.е. удовлетворяет тождеству*

$$\omega([A, B], C) + \omega([B, C], A) + \omega([C, A], B) = 0. \tag{2.10}$$

Если $\widetilde{\mu}^{(1)}$ *и* $\widetilde{\mu}^{(2)}$ *— два поднятия одного и того же проективного представления* μ*, то соответствующие коциклы* ω_1 *и* ω_2 *когомологичны:*

$$\omega_1(A, B) - \omega_2(A, B) = \varphi([A, B]). \tag{2.11}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mu}$ — поднятие проективного представления μ. Для доказательства (2.10) применим тождество Якоби:

$$\begin{aligned} 0 = [[\widetilde{\mu}_A, \widetilde{\mu}_B], \widetilde{\mu}_C] + [[\widetilde{\mu}_B, \widetilde{\mu}_C], \widetilde{\mu}_A] + [[\widetilde{\mu}_C, \widetilde{\mu}_A], \widetilde{\mu}_B] = \\ = \widetilde{\mu}_{[[A,B],C]} + \widetilde{\mu}_{[[B,C],A]} + \widetilde{\mu}_{[[C,A],B]} + \\ + \omega([A, B], C) + \omega([B, C], A) + \omega([C, A], B) = \\ = \omega([A, B], C) + \omega([B, C], A) + \omega([C, A], B). \end{aligned}$$

Обратно, пусть ω — 2-коцикл. То же самое вычисление теперь доказывает, что отображение $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\mu}/\mathbb{C}\,\mathrm{Id}$ является гомоморфизмом алгебр Ли, т.е. проективным представлением.

Пусть теперь $\widetilde{\mu}_A^{(2)} = \widetilde{\mu}_A^{(1)} + \varphi(A)\,\mathrm{Id}$. Имеем:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{\mu}_A^{(1)}, \widetilde{\mu}_B^{(1)}] &= [\widetilde{\mu}_A^{(2)} - \varphi(A)\,\mathrm{Id}, \widetilde{\mu}_B^{(2)} - \varphi(B)\,\mathrm{Id}] = [\widetilde{\mu}_A^{(2)}, \widetilde{\mu}_B^{(2)}] = \\
&= \widetilde{\mu}_{[A,B]}^{(2)} + \omega(A,B)\,\mathrm{Id} = \widetilde{\mu}_{[A,B]}^{(1)} + (\omega(A,B) + \varphi([A,B]))\,\mathrm{Id}\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Тем самым проективному представлению μ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ однозначно сопоставляется 2-коцикл $\omega_{\widetilde{\mu}}$, определенный с точностью до кограницы, т.е. однозначно определенный двумерный класс когомологий $p_\mu = [\omega_{\widetilde{\mu}}] \in H^2(\mathfrak{g})$. Этот класс измеряет отличие проективного представления от «настоящего» (линейного):

Лемма 2.2. *Класс p_μ равен нулю тогда и только тогда, когда проективное представление μ имеет поднятие, являющееся линейным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Утверждение «тогда» следует из леммы 2.1. Обратно, пусть $p_\mu = 0$, и пусть $\widetilde{\mu}$ — какое-либо поднятие μ. По условию $\omega_{\widetilde{\mu}}(A,B) = \varphi([A,B])$ для некоторого линейного функционала φ. Формула $A \mapsto \widetilde{\mu}(A) + \varphi(A)\,\mathrm{Id}$ задает искомое поднятие. $\square$

Алгебру Ли $\mathfrak{h}$ назовем (*одномерным*) *центральным расширением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если как линейное пространство $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}c$, где $c \in \mathfrak{h}$ — некоторый элемент, а коммутатор устроен так:

$$\begin{gathered}
[A,B]_{\mathfrak{h}} = [A,B]_{\mathfrak{g}} + \omega(A,B)c \quad (A,B \in \mathfrak{g}), \\
[A,c] = 0 \quad (A \in \mathfrak{g}).
\end{gathered} \tag{2.12}$$

Иными словами, центральное расширение это точная последовательность гомоморфизмов алгебр Ли $0 \to \mathbb{C} \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to 0$, где $\mathbb{C}$ рассматривается как алгебра Ли с тривиальным коммутатором.

Два центральных расширения $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ одной и той же алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называются эквивалентными, если существует такой линейный функционал $\varphi \in \mathfrak{g}^*$, что отображение $A \mapsto A + \varphi(A)c_2$, $c_1 \mapsto c_2$ — гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_2$.

Предложение 2.4. *Равенство* (2.12) *определяет центральное расширение (т.е.* $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}$ *действительно является коммутатором в алгебре Ли) тогда и только тогда, когда* ω *— 2-коцикл алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. *Коциклы, соответствующие эквивалентным центральным расширениям, когомологичны.*

Доказательство производится прямой проверкой и по сути не отличается от доказательства леммы 2.1. Причиной этого является то очевидное обстоятельство, что поднятие проективного представления μ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является линейным представлением центрального расширения $\mathfrak{g}$ с помощью коцикла ω_μ. При этом различным поднятиям одного и того же проективного представления соответствуют эквивалентные центральные расширения. Тривиальному центральному расширению — прямой сумме — соответствует нулевой коцикл, поэтому когомологичность коцикла нулю соответствует тому, что центральное расширение эквивалентно тривиальному.

В дальнейшем мы не будем различать проективные представления и их поднятия, и будем применять термин «проективное представление» непосредственно к отображению $\widetilde{\mu}$, удовлетворяющему равенству (2.9).

2.3. Обобщенно-якобиевы матрицы

Рассмотрим линейное пространство W с базисом f_i, $i \in \mathbb{Z}$. Множество $\mathrm{End}(W)$ его линейных преобразований естественно отождествляется с множеством бесконечных (во все четыре стороны) матриц a_{ij} $(i,j \in \mathbb{Z})$, каждая строка которых содержит только конечное число ненулевых элементов. Такие матрицы можно перемножать естественным образом: $(AB)_{ij} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} A_{ik}B_{kj}$ — сумма будет конечной. Назовем бесконечную матрицу a_{ij} *обобщенно-якобиевой*, если существует такое N (для каждой матрицы свое), что $a_{ij} = 0$ при $|i-j| \geqslant N$. Нетрудно видеть, что обобщено-якобиевы матрицы образуют в $\mathrm{End}(W)$ ассоциативную подалгебру и подалгебру Ли относительно коммутатора $[A, B] = AB - BA$. Эту алгебру Ли мы будем обозначать $\overline{a_\infty}$. Наша ближайшая цель — построить действие $\overline{a_\infty}$ на пространстве $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$ полубесконечных форм.

Обозначим $\operatorname{diag}_p(\{a_k\})$ матрицу A, действующую по правилу: $Af_i = a_i f_{i+p}$ (т.е. ненулевые элементы стоят только на p-й диагонали). Определим отображение $\mu\colon \overline{a_\infty} \to \operatorname{End}(\Lambda^{\frac{\infty}{2}})$ сначала для матриц вида $A = \operatorname{diag}_p(\{a_k\})$, а затем продолжим его по линейности на всю $\overline{a_\infty}$. Мы будем считать, что операторы μ_A действуют на полубесконечные формы *справа*.

При $p \neq 0$ положим

$$\mu_A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k f_k f^*_{p-k} = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k f^*_{p-k} f_k. \tag{2.13}$$

Легко видеть, что ряд сходится: на базисный вектор $\psi_{\mathfrak{M}}$ действуют нулем (справа!) все слагаемые $f_k f^*_{p-k}$, в которых $k < \min \mathfrak{M}_p$ или $p - k < -\max \mathfrak{M}_e$. Последнее равенство следует из Предложения 2.3.

При $p = 0$ формула (2.13), однако, неприменима — оба ряда расходятся. Чтобы справиться с этой проблемой, применим «нормальное упорядочение» операторов f_k, f^*_{-k} (обозначаемое двоеточиями), полагая

$$\mu_A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} {:}a_k f_k f^*_{-k}{:} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k<0} a_k f_k f^*_{-k} - \sum_{k\geqslant 0} a_k f^*_{-k} f_k. \tag{2.14}$$

Обозначим τ_p оператор $W \to W$, действующий по правилу $\tau_p f_i = f_{i+p}$. Очевидно, $\tau_p^{-1} = \tau_{-p}$, а сопряженный оператор (относительно формы (2.7)) устроен так: $\tau_p^* f_i^* = f^*_{i-p}$.

Предложение 2.5. *Операторы μ_A, заданные формулами* (2.13) *и* (2.14), *удовлетворяют коммутационным соотношениям* (*тождеству Лейбница*):

$$[\mu_A, f_i] = \tau_{-p} A \tau_p(f_i), \tag{2.15}$$

$$[\mu_A, f_i^*] = -\tau_p^* A^* \tau_{-p}^*(f_i^*). \tag{2.16}$$

Здесь Af_i означает результат применения оператора A к вектору f_i. Результат — линейная комбинация f_j — рассматривается как оператор на $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$. $A^*f_i^*$ имеет аналогичный смысл; A^* — сопряженный оператор.

Доказательство проводится прямым вычислением. Пусть сначала $A = \operatorname{diag}_p(\{a_k\}),\ \ p \neq 0$. Тогда

$$[\mu_A, f_i] = \sum_k a_k(f_k f_{p-k}^* f_i - f_i f_k f_{p-k}^*) \overset{\text{по (2.8)}}{=} a_{i+p} f_{i+p} = \tau_{-p} A \tau_p(f_i).$$

При $A = \operatorname{diag}_0(\{a_k\})$, а также при замене f_i на f_i^* вычисления аналогичны. $\square$

Теорема 2.1. *Отображение μ является проективным представлением алгебры $\overline{a_\infty}$ в пространстве $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$.*

Доказательство. Из предложения 2.5 следует, что оператор $\mu_{[A,B]} - [\mu_A, \mu_B]$ коммутирует со всеми операторами f_i, f_i^*. Поэтому согласно следствию из предложения 2.3 этот оператор есть оператор умножения на число $\omega(A,B)$. $\square$

В явном виде коцикл $\omega(A,B)$ может быть вычислен следующим образом. Для произвольного оператора $A \in \overline{a_\infty}$ определим оператор $A^+ \overset{\text{def}}{=} PAP$, где P — проектор, для которого

$$Pf_k = \begin{cases} f_k, & k < 0, \\ 0, & k \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Нетрудно проверить, что для любых операторов $A, B \in \overline{a_\infty}$ оператор $[A^+, B^+] - [A,B]^+$ — финитный (т.е. только конечное число его матричных элементов отличны от нуля).

Теорема 2.2. *Имеет место следующая формула:*

$$\omega(A,B) = \operatorname{Tr}([A^+, B^+] - [A,B]^+). \tag{2.18}$$

Коцикл ω не является кограницей (и, следовательно, проективное представление μ не происходит из линейного представления).

Доказательство. Очевидно, формулу (2.18) достаточно доказать в случае $A = \operatorname{diag}_p(\{a_k\})$, $B = \operatorname{diag}_q(\{b_k\})$. Пусть сначала $p + q \neq 0$. Операторы $[A^+, B^+]$ и $[A, B]^+$ имеют ненулевые элементы лишь на диагонали с номером $p + q$. Поэтому правая часть равенства (2.18) равна 0. Для вычисления $\omega(A, B)$ подействуем оператором $\mu_{[A,B]} - [\mu_A, \mu_B]$ на вакуумный вектор $v = \cdots \wedge f_{-2} \wedge f_{-1}$. Очевидно, что результат будет линейной комбинацией векторов заряда $p+q$ и $-p-q$. Поскольку заряд самого v равен 0, а оператор является оператором умножения на число, это число равно нулю.

Пусть теперь $p = -q > 0$. Тогда:

$$A^+ f_k = \begin{cases} a_k f_{k+p}, & k < -p, \\ 0, & k \geqslant -p, \end{cases}$$

$$B^+ f_k = \begin{cases} b_k f_{k-p}, & k < 0, \\ 0, & k \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\left[A^+, B^+\right] f_k = \begin{cases} (a_{k-p} b_k - a_k b_{k+p}) f_k, & k < -p, \\ a_{k-p} b_k f_k, & -p \leqslant k < 0, \\ 0, & k \geqslant 0, \end{cases}$$

$$[A, B]^+ f_k = \begin{cases} (a_{k-p} b_k - a_k b_{k+p}) f_k, & k < 0, \\ 0, & k \geqslant 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\operatorname{Tr}([A^+, B^+] - [A, B]^+) = \sum_{k=0}^{p-1} a_{k-p} b_k. \tag{2.19}$$

Для вычисления $\omega(A, B)$ подействуем $\mu_{[A,B]} - [\mu_A, \mu_B]$ на вакуумный вектор $v = \cdots \wedge f_{-2} \wedge f_{-1}$. Поскольку $[A, B] = \operatorname{diag}_0(\{c_k\})$ (где $c_k = a_{k-p} b_k - b_{k+p} a_k$), оператор $\mu_{[A,B]} = \sum\limits_{k \geqslant 0} c_k f^*_{-k} f_k - \sum\limits_{k<0} c_k f_k f^*_{-k}$ действует на v нулем. Оператор μ_A действует так:

$$v\mu_A = \sum_{k=-p}^{-1} c_k \ldots f_{k-1} \wedge \widehat{f_k} \wedge f_{k+1} \wedge \cdots \wedge f_{-1} \wedge f_{k+p},$$

откуда $v\mu_A\mu_B = \left(\sum\limits_{k=0}^{p-1} a_{k-p}b_k\right)v$. Нетрудно проверить, что $v\mu_B = 0$, откуда следует (2.18).

Рассмотрим теперь операторы $A = \mathrm{diag}_1(\{1\})$ и $B = \mathrm{diag}_{-1}(\{1\})$. Они коммутируют: $AB = BA = \mathrm{Id}$. В то же время по формуле (2.18) $\omega(A, B) = 1$, откуда следует, что равенство $\omega(A, B) = \varphi([A, B])$ невозможно — коцикл ω не когомологичен нулю. $\square$

Замечание. Пусть ν_A — другое проективное представление алгебры Ли $\overline{a_\infty}$ в пространстве $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$, удовлетворяющее тождеству Лейбница (2.15), (2.16). Тогда оператор $\nu_A - \mu_A$ коммутирует со всеми f_i и f_i^*, и, следовательно, $\nu_A = \mu_A + \varphi(A)\,\mathrm{Id}$, где φ — линейный функционал. Тем самым, любое проективное представление $\overline{a_\infty}$ в $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$, удовлетворяющее тождеству Лейбница, эквивалентно μ. В частности, такое представление всегда является проективным, и не может быть линейным.

2.4. Обобщение: V-конечные операторы

Понятие обобщенно-якобиевой матрицы, введенное в начале данного параграфа, имеет очевидный недостаток — неинвариантность: является ли матрица оператора $A\colon W \to W$ обобщенно-якобиевой, зависит от выбора базиса в пространстве W (которое, кроме того, приходится предполагать счетномерным). Рассмотрим обобщение алгебры $\overline{a_\infty}$, свободное от этого недостатка. А именно, зафиксируем в пространстве W подпространство V и назовем оператор $A\colon W \to W$ *V-конечным*, если факторпространство $(A(V) + V)/V$ конечномерно. V-конечные операторы образуют подалгебру алгебры $\mathrm{End}(W)$, которая будет обозначаться $\mathrm{End}_V(W)$.

В случае, когда W имеет базис f_i, $i \in \mathbb{Z}$, а подпространство V порождено всеми f_i с $i < 0$, матрицы V-конечных операторов обладают следующими свойствами:

1. Число ненулевых элементов в каждой строке матрицы конечно.

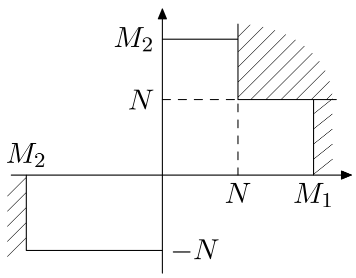

Рис. 4. V-конечная матрица и коцикл ω_P

2. Для некоторого N при $i < -N,\ \ j > N$ элемент a_{ij} равен нулю.

Свойство 1 выполнено, разумеется, для матрицы любого оператора $A \in \mathrm{End}(W)$. Свойство 2 означает, что правый верхний угол, заштрихованный на рис. 4, не содержит ненулевых элементов. Нетрудно видеть, что условия 1, 2 являются необходимыми и достаточными условиями V-конечности. В частности, обобщенно-якобиевы матрицы V-конечны, поэтому $\mathrm{End}_V(W)$ действительно является расширением $\overline{a_\infty}$.

Пусть теперь $P\colon W \to W$ — (какой-нибудь) проектор, для которого $PW = V$. Зафиксируем в W базис e_α ($\alpha \in \mathfrak{W}$) такой, что подпространство V порождено векторами e_α ($\alpha \in \mathfrak{V}$) для некоторого подмножества $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$. Будем обозначать $\mathrm{Tr}\, A$ след оператора A по отношению к этому базису.

Лемма 2.3. *Для всякого* $A \in \mathrm{End}(W)$ *оператор* $[P, A]$ *имеет след, равный нулю.*

Доказательство. Имеем:

$$PAe_\alpha = \sum_{\beta \in \mathfrak{W}\setminus\mathfrak{V}} a_{\alpha\beta} e_\beta,$$

$$APe_\alpha = \begin{cases} \sum\limits_{\beta \in \mathfrak{W}} a_{\alpha\beta} e_\beta, & \alpha \in \mathfrak{V}, \\ 0, & \alpha \notin \mathfrak{V}. \end{cases}$$

Отсюда видно, что матрица оператора $[P, A]$ диагональных элементов не содержит. $\square$

По аналогии с теоремой 2.2 имеет место

Теорема 2.3. *Пусть* A, $B \in \mathrm{End}_V(W)$. *Тогда функция*

$$\begin{aligned}\omega_P(A, B) = \mathrm{Tr}([PAP, PBP] - P[A, B]P) = \\ = \mathrm{Tr}(P[A, P]B - P[B, P]A) \quad (2.20)\end{aligned}$$

корректно определена и является 2-*коциклом алгебры Ли* $\mathrm{End}_V(W)$.

Доказательство. Пусть $AV, BV \subset V \oplus E$, где E — конечномерное пространство, порожденное $e_{\beta_1}, \ldots, e_{\beta_N}$ (где $\beta_1, \ldots \beta_N \in \mathfrak{W} \setminus \mathfrak{V}$). Тогда непосредственным вычислением проверяется, что имеет место такая формула:

$$\omega_P(A, B) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha \in \mathfrak{V}} (b_{\alpha\beta_i} a_{\beta_i\alpha} - a_{\alpha\beta_i} b_{\beta_i\alpha}). \quad (2.21)$$

Поскольку для каждого β только конечное число матричных элементов $a_{\beta\alpha}, b_{\beta\alpha}$ отлично от нуля, сумма конечна. Тождество (2.10) для 2-коцикла проверяется теперь непосредственным вычислением.

Второе равенство в (2.20) следует, после раскрытия скобок, из леммы 2.3, примененной к операторам $PAPB$ и $PBPA$. $\square$

В случае, когда пространство W имеет базис f_i, $i \in \mathbb{Z}$, а проектор P определяется формулой (2.17), конечность суммы (2.21) иллюстрирует рис. 4: в заштрихованных областях матриц A и B стоят нули, и поэтому в сумму входят только элементы A и B, расположенные в «угле» и в области, ему симметричной.

Более того, коцикл ω можно в этом случае получить так же, как для алгебры $\overline{a_\infty}$. А именно, для V-конечной матрицы $A = (a_{ij})$ можно определить оператор μ_A на пространстве полубесконечных форм формулой

$$\mu_A = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k} a_{k,p-k} {:} f_k f_{p-k}^* {:}$$

(нормальное упорядочение понимается в том же смысле, что и в формуле (2.14)). Нетрудно видеть, что ряд сходится: при действии оператора μ_A на полубесконечную форму все члены ряда, кроме конечного числа, действуют нулем. Аналогично теореме 2.1 доказывается, что $\mu\colon \operatorname{End}_V(W) \to \operatorname{End}(\Lambda^{\frac{\infty}{2}})$ является проективным представлением, и соответствующий коцикл равен ω.

Лемма 2.4. *Пусть проекторы P_1 и P_2 ортогональны: $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$, и пусть $A, B \in \operatorname{End}_V(W)$ как для $V = V_1 = P_1W$, так и для $V = V_2 = P_2W$. Тогда $\operatorname{Tr}[P_1A, P_2B] = 0$.*

Доказательство. Выберем в W базис e_α такой, что V_1 порождается e_α, $\alpha \in \mathfrak{V}_1$, а V_2 порождается e_α, $\alpha \in \mathfrak{V}_2$. Тогда непосредственным вычислением проверяется, что

$$\operatorname{Tr} P_1AP_2B = \operatorname{Tr} P_2BP_1A = \sum_{\alpha\in\mathfrak{V}_1,\beta\in\mathfrak{V}_2} a_{\alpha\beta}b_{\beta\alpha}.$$

Условие $A, B \in \operatorname{End}_{V_1}(W) \cap \operatorname{End}_{V_2}(W)$ обеспечивает конечность суммы. Отсюда и следует утверждение леммы. $\square$

Если проекторы P_1 и P_2 ортогональны, то P_1+P_2 также является проектором.

Предложение 2.6. *На пересечении алгебр $\operatorname{End}_{P_1V}(W)$ и $\operatorname{End}_{P_2V}(W)$ имеет место равенство $\omega_{P_1+P_2} = \omega_{P_1} + \omega_{P_2}$.*

Доказательство. Согласно второму равенству в формуле (2.20)

$$\begin{aligned}
&\omega_{P_1+P_2}(A,B) = \\
&\quad = \operatorname{Tr}((P_1+P_2)[A, P_1+P_2]B - (P_1+P_2)[B, P_1+P_2]A) = \\
&\quad = \omega_{P_1}(A,B) + \omega_{P_2}(A,B) + \\
&\qquad\quad + \operatorname{Tr}(P_1[A,P_2]B - P_1[B,P_2]A + P_2[A,P_1]B - P_2[B,P_1]A) = \\
&\quad = \omega_{P_1}(A,B) + \omega_{P_2}(A,B) + \operatorname{Tr}[P_1A, P_2B] + \operatorname{Tr}[P_2A, P_1B] = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \omega_{P_1}(A,B) + \omega_{P_2}(A,B)
\end{aligned}$$

по лемме 2.4. $\square$

Если пространство $V = PW$ конечномерно, то коцикл ω_P, как следует из первого равенства в (2.20), когомологичен нулю. Из этого замечания и предложения 2.6 вытекает

Следствие. *Если проектор P' подчинен проектору P (т.е. $P'W \subset PW$), и факторпространство $PW/P'W$ конечномерно, то коциклы ω_P и $\omega_{P'}$ когомологичны. В частности, все коциклы вида ω_P на одной и той же алгебре $\mathrm{End}_V(W)$ когомологичны.*

Последнее обстоятельство позволит нам в дальнейшем писать ω_V вместо ω_P, если нас интересует только когомологический класс коцикла.

Проиллюстрируем введенные понятия на «модельном» примере. Пусть $\mathcal{E}$ — (компактная) комплексная кривая, и $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{E}$. Рассмотрим на $\mathcal{E}$ мероморфную форму ω типа $(1,0)$, имеющую полюса только в точках $p_1, \ldots, p_n$, и докажем, что сумма ее вычетов в этих точках равна нулю. Разумеется, этот факт сразу следует из формулы Стокса (форма типа $(1,0)$ на *кривой*, т.е. одномерном многообразии, необходимо замкнута); наша цель, однако, состоит в том, чтобы дать чисто алгебраическое доказательство (имея в виду, например, возможные обобщения на случай кривых над конечными полями).

Возьмем в качестве W пространство L^n, где L — пространство рядов Лорана от переменной z, а в качестве $V \subset W$ — пространство K^n, где $K \subset L$ — пространство рядов, не содержащих отрицательных степеней z. Проектор $P\colon W \to V$ «отрезает» главную часть каждого ряда.

Пусть теперь F — пространство мероморфных функций на кривой $\mathcal{E}$, имеющих полюса только в точках $p_1, \ldots, p_n$. Зафиксировав в окрестности каждой точки p_i координату z, мы определим естественное отображение $F \to W$: функции $a(z)$ сопоставляется совокупность ее лорановских разложений в точках $p_1, \ldots, p_n$. Образ F при таком отображении обозначим $\mathcal{F}$.

Пространство $\mathcal{F}$ является «почти дополнительным» к пространству V. А именно, пересечение $X = V \cap \mathcal{F}$ одномерно (глобальная голоморфная функция на кривой есть константа), а коразмерность пространства $Y = V + F$ конечна — равна роду g кривой $\mathcal{E}$.

Форма типа $(1,0)$ обязательно имеет вид $\omega = f\,dg$, где f, g — мероморфные функции на кривой $\mathcal{E}$, причем можно добиться того, чтобы $f, g \in F$. В пространстве W действуют операторы M_a умножения на функции $a \in F$: i-я компонента умножается на ряд Лорана функции $a(z)$ в точке p_i. Аналогично предложению 3.1 доказывается, что искомая сумма вычетов равна $\omega_V(M_f, M_g)$. Согласно Предложению 2.6, имеем, с точностью до кограниц: $\omega_V + \omega_{\mathcal{F}} = \omega_Y - \omega_X = -\omega_W = 0$. Но операторы M_f и M_g коммутируют, следовательно, для любой кограницы ν выполнено равенство $\nu(M_f, M_g) = 0$. Поэтому $\omega_V(M_f, M_g) = -\omega_{\mathcal{F}}(M_f, M_g)$. Ввиду равенств $M_f(\mathcal{F}) = M_g(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ получаем $\omega_{\mathcal{F}}(M_f, M_g) = 0$, что заканчивает доказательство.

§3. Представления алгебр Гейзенберга и Вирасоро

Согласно предложению 2.4 коцикл ω определяет нетривиальное (т.е. не эквивалентное прямой сумме) центральное расширение a_∞ алгебры $\overline{a_\infty}$ и его представление в пространстве $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$. В данном параграфе мы будем изучать различные подалгебры $\overline{a_\infty}$ и центральные расширения, порожденные ограничением на эти подалгебры коцикла ω.

Для построения этих подалгебр отождествим линейное пространство, порожденное f_i, с пространством многочленов Лорана $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$, отображая $f_i \mapsto z^i$. Нетрудно видеть, что оператор умножения на z и оператор $\dfrac{d}{dz}$ при таком отождествлении изображаются обобщенно-якобиевыми матрицами. Следовательно, то же самое верно и для произвольного дифференциального оператора $\mathcal{D} = \sum\limits_{k=0}^{N} u_k(z) \left(\dfrac{d}{dz}\right)^k$, коэффициенты которого $u_k(z)$ — многочлены Лорана. Алгебра таких дифференциальных операторов будет обозначаться $\mathrm{Dif}(S^1)$. Тем самым, мы построили вложение алгебр $\mathrm{Dif}(S^1) \hookrightarrow \overline{a_\infty}$. Коцикл ω определяет центральное расширение алгебры дифференциальных операторов. Ниже мы увидим, что это расширение нетривиально.

3.1. Представление алгебры Гейзенберга

Начнем с дифференциальных операторов нулевого порядка — операторов M_u умножения на функцию u.

Предложение 3.1. *Имеет место формула*

$$\omega(M_{u_1}, M_{u_2}) = -\operatorname*{Res}_{z=0} u_1(z) du_2(z). \tag{3.1}$$

Доказательство. Равенство (3.1) достаточно проверить для $u_1 = z^p$, $u_2 = z^q$. Имеем:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} z^p dz^q = \begin{cases} -p, & p+q=0, \\ 0, & p+q \neq 0. \end{cases}$$

В то же время по формуле (2.19)

$$\omega(M_{u_1}, M_{u_2}) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{p-1} 1 = p, & p+q=0, \\ 0, & p+q \neq 0. \end{cases} \quad \square$$

При сопоставлении $A \mapsto \mu_A$ операторы M_{z^k} переходят в операторы E_k, задаваемые формулами

$$E_k = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} f_\alpha f_{k-\alpha}^* = -\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} f_\alpha^* f_{k-\alpha}, \tag{3.2}$$

$$E_0 = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} {:}f_\alpha f_{-\alpha}^*{:} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha=-\infty}^{-1} f_\alpha f_{-\alpha}^* - \sum_{\alpha=0}^{\infty} f_{-\alpha}^* f_\alpha. \tag{3.3}$$

Поскольку операторы умножения на функцию коммутируют между собой, из предложения 3.1 следует, что коммутационные соотношения для операторов E_k таковы:

$$[E_k, E_l] = \begin{cases} k, & k+l=0, \\ 0, & k+l \neq 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Пусть W — линейное пространство с базисом w_i и кососимметрической билинейной формой $(\cdot,\cdot)$. *Алгеброй Гейзенберга* $\mathrm{Heis}(W,(\cdot,\cdot))$ называется алгебра Ли с образующими w_i и c и соотношениями

$$\begin{gathered} [w_i, w_j] = (w_i, w_j)c, \\ [w_i, c] = 0. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Определим теперь на пространстве с базисом E_i, $i \in \mathbb{Z}$ билинейную форму соотношением

$$(E_i, E_j) = \begin{cases} i, & i+j=0, \\ 0, & i+j \neq 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Операторы M_u образуют в $\mathrm{Dif}(S^1)$ коммутативную подалгебру, изоморфную $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Тем самым из предложения 3.1 вытекает

Следствие. *Коцикл* (3.1) *определяет нетривиальное центральное расширение алгебры* $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$, *изоморфное алгебре Гейзенберга, построенной по билинейной форме* (3.6), *и представление этого расширения в пространстве* $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$. *Центральный элемент* c *в этом представлении действует как единичный оператор.*

Изучим это представление подробнее. Непосредственно проверяется

Предложение 3.2. *Пусть* $\psi_{\mathfrak{M}} E_k = \sum_{\alpha} a_\alpha \psi_{\mathfrak{M}_\alpha}$. *Тогда для всех* α *коэффициент* a_α *— целый и положительный,* $C(\mathfrak{M}_\alpha) = C(\mathfrak{M})$, $U(\mathfrak{M}_\alpha) = U(\mathfrak{M}) + k$. *Оператор* E_0 *действует по формуле* $E_0 \psi_{\mathfrak{M}} = -C(\mathfrak{M}) \psi_{\mathfrak{M}}$.

Короче это предложение можно сформулировать так: оператор E_k сохраняет заряд и увеличивает энергию на k. Из этого следует, что построенное представление алгебры Гейзенберга приводимо: все подпространства $\Lambda^{\frac{\infty}{2}+n}$, порожденные векторами $\psi_{\mathfrak{M}}$ с $C(\mathfrak{M}) = n$, являются инвариантными. Возникающее в пространстве $\Lambda^{\frac{\infty}{2}+n}$ представление алгебры Гейзенберга обозначим H_n. Ниже мы опишем структуру представления H_n более подробно — в частности, увидим, что оно неприводимо.

Предложение 2.5, примененное к операторам E_k (которые, кстати, есть μ_{τ_k}), дает следующие коммутационные соотношения:

$$[E_k, f_l] = f_{k+l}, \quad [E_k, f_l^*] = -f_{k+l}^*. \tag{3.7}$$

Теорема 3.1. *Представления* H_n *алгебры Гейзенберга неприводимы.*

Следствие. *Линейный оператор* $A\colon \Lambda^{\frac{\infty}{2}} \to \Lambda^{\frac{\infty}{2}}$, *коммутирующий со всеми* E_i, *умножает каждый базисный вектор* $\psi_{\mathfrak{M}}$ *на константу, зависящую только от* $C(\mathfrak{M})$.

Доказательство теоремы 3.1.

Пространство $\Lambda^{\frac{\infty}{2}+n}$ содержит *основное состояние* $v = = \dots \wedge f_{n-2} \wedge f_{n-1}$ с энергией $U(v) = n(n-1)/2$. Очевидно, что $E_i v = 0$, если $i < 0$. Покажем, что каждый вектор $w \in \Lambda^{\frac{\infty}{2}+n}$ единственным образом представляется в виде $w = P(E_1, E_2, \dots)v$, где $P(x_1, x_2, \dots)$ — многочлен (от бесконечного числа переменных). Из этого факта неприводимость, разумеется, следует.

Докажем сначала единственность, т.е. тот факт, что из $P(E_1, E_2, \dots)v = 0$ следует $P \equiv 0$. Из (3.4) вытекает, что при $i > 0$ выполнено коммутационное соотношение $[E_{-i}, P(E_1, E_2, \dots)] = -i\dfrac{\partial P}{\partial E_i}$. Поэтому если $P(E_1, E_2, \dots)v = 0$, то и $\dfrac{\partial P}{\partial E_i}(E_1, E_2, \dots)v = 0$ для всякого $i > 0$. Если многочлен P ненулевой, то, продифференцировав его должное количество раз, получим невозможное равенство $v = 0$.

Для доказательства существования воспользуемся соображениями размерности. Припишем переменной E_i степень i; таким образом, степень монома $E_{i_1}^{\alpha_1} \dots E_{i_s}^{\alpha_s}$ равна $\deg(E_{i_1}^{\alpha_1} \dots E_{i_s}^{\alpha_s}) = = \sum\limits_{p=1}^{s} \alpha_p i_p$. По предложению 3.2 если P — однородный многочлен, то $P(E_1, E_2, \dots)v$ является линейной комбинацией векторов с энергией $n(n-1)/2 + \deg P$. Чтобы доказать существование, требуется проверить, что размерность пространства однородных многочленов степени d равна размерности пространства векторов с зарядом n и энергией $n(n-1)/2 + d$.

Размерность пространства однородных многочленов степени d равна числу разбиений $\varphi(d)$ числа d в (неупорядоченную) сумму целых положительных слагаемых. Производящая функция числа разбиений есть, очевидно,

$$\Phi(q) = \sum_d \varphi(d) q^d = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}. \tag{3.8}$$

Из формулы (2.5) следует, что производящая функция размерности пространства векторов заряда n и энергии m равна как раз $q^{n(n-1)/2}\Phi(q)$. $\square$

Форма (3.6) вырождена — ее ядро одномерно и порождено элементом E_0. Поэтому центр алгебры Гейзенберга двумерен, содержит E_0 и элемент c. Элемент c действует в представлении H_n единичным оператором, а E_0, согласно предложению 3.2, умножением на $-n$. В дальнейшем символом H_λ, где $\lambda \in \mathbb{C}$ будет обозначаться представление алгебры Гейзенберга, в котором существует вектор $v = v_\lambda \in H_\lambda$ («основное состояние»), на который операторы E_i с $i < 0$ действуют нулем, оператор E_0 — умножением на λ, а операторы E_i с $i > 0$ — свободно, т.е. для всякого $w \in H_\lambda$ существует и единствен многочлен P (от бесконечного числа переменных) такой, что $w = P(E_1, E_2, \ldots)v$. Очевидно, представление H_λ неприводимо. Поскольку оператор E_0 принадлежит центру алгебры Гейзенберга, он действует в H_λ умножением на скаляр — по условию этот скаляр равен λ.

3.2. Представление алгебры Вирасоро

Рассмотрим теперь дифференциальные операторы первого порядка. Сначала обратимся к операторам без свободного члена — векторным полям. Они образуют в Dif подалгебру Ли Vect с коммутатором

$$\left[v_1(z)\frac{d}{dz}, v_2(z)\frac{d}{dz}\right] = (v_1(z)v_2'(z) - v_1'(z)v_2(z))\frac{d}{dz}.$$

Предложение 3.3. *Имеет место формула*

$$\omega\left(v_1(z)\frac{d}{dz}, v_2(z)\frac{d}{dz}\right) = -\frac{1}{12}\operatorname*{Res}_{z=0} v_1''(z)v_2'(z). \tag{3.9}$$

Доказательство проводится прямым вычислением (ср. предложение 3.1).

При сопоставлении $A \mapsto \mu_A$ векторное поле $z^{p+1}\dfrac{d}{dz}$ переходит в оператор L_p, заданный формулой

$$L_p = \sum_\alpha \alpha f_\alpha f_{p-\alpha}^* \tag{3.10}$$

при $p \neq 0$ и

$$L_0 = \sum_{\alpha} :\alpha f_\alpha f^*_{-\alpha}: \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha>0} \alpha f_\alpha f^*_{-\alpha} - \sum_{\alpha<0} \alpha f^*_{-\alpha} f_\alpha = \\ = \sum_{\alpha>0} \alpha (f_\alpha f^*_{-\alpha} + f^*_\alpha f_{-\alpha}). \quad (3.11)$$

Аналогично предложению 3.2 доказывается

Предложение 3.4. *Оператор L_p сохраняет заряд и увеличивает энергию на p. Оператор L_0 обладает свойством $L_0\psi_{\mathfrak{M}} = -U(\mathfrak{M})\psi_{\mathfrak{M}}$.*

Иными словами, $-L_0$ — «оператор энергии» в том же смысле, в каком $-E_0$ — «оператор заряда» (см. предложение 3.2).

Прежде чем выписывать коммутационные соотношения для операторов L_p, мы несколько обобщим приведенную конструкцию. А именно, имеет место

Лемма 3.1. *Формула*

$$T_{\lambda\mu}\left(v(z)\frac{d}{dz}\right) = v(z)\frac{d}{dz} + \lambda M_{v'(z)} + \frac{\mu}{z} M_{v(z)} \quad (3.12)$$

определяет двупараметрическое семейство гомоморфных вложений Vect *в алгебру Ли дифференциальных операторов первого порядка.*

Доказательство, т.е. проверка равенства

$$\left[T_{\lambda\mu}\left(v_1(z)\frac{d}{dz}\right), T_{\lambda\mu}\left(v_2(z)\frac{d}{dz}\right)\right] = T_{\lambda\mu}\left(\left[v_1(z)\frac{d}{dz}, v_2(z)\frac{d}{dz}\right]\right),$$

производится прямым вычислением.

Замечание. «Инвариантный» смысл формулы (3.12) заключается в следующем. Рассмотрим действие векторных полей на тензорных полях степени λ, имеющих в нуле полюс и ветвление, т.е. на выражениях вида $u(z)z^{\mu}(dz)^{\lambda}$, где $u(z)$ — многочлен Лорана, а λ и μ — параметры. Действие это таково:

$$\begin{aligned} v(z)\frac{d}{dz}(u(z)z^{\mu}(dz)^{\lambda}) &= \\ &= (v(z)u'(z)z^{\mu} + \mu v(z)u(z)z^{\mu-1} + \lambda v'(z)u(z)z^{\mu})(dz)^{\lambda} = \\ &= T_{\lambda\mu}\left(v(z)\frac{d}{dz}\right)u(z)z^{\mu}(dz)^{\lambda}. \end{aligned}$$

Непосредственным вычислением проверяется, что при сопоставлении $A \mapsto \mu_A$ оператору $T_{\lambda\mu}\left(z^{p+1}\frac{d}{dz}\right)$ соответствует оператор

$$L_p^{\lambda,\mu} = \sum_k (k + \lambda p + \lambda + \mu){:}f_k f_{p-k}^*{:}\,. \tag{3.13}$$

Формула (2.19) показывает, что $\omega(L_p^{\lambda,\mu}, L_q^{\lambda,\mu}) = 0$, если $p + q \neq 0$, и

$$\omega(L_p^{\lambda,\mu}, L_{-p}^{\lambda,\mu}) = -p^3\frac{12(\lambda - 1/2)^2 - 1}{12} + p\frac{12(\mu - 1/2)^2 - 1}{12}. \tag{3.14}$$

Алгеброй Вирасоро Vir называется алгебра Ли, порожденная образующими L_p, $p \in \mathbb{Z}$ и c, с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} &[L_p, L_q] = \begin{cases} (q-p)L_{p+q}, & p+q \neq 0, \\ -2pL_0 + \dfrac{p^3 - p}{12}c, & p+q = 0, \end{cases} \\ &[L_p, c] = 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

В неприводимом представлении алгебры Вирасоро центральный элемент c действует умножением на константу, называемую *центральным зарядом* представления. Нетрудно видеть, что факторалгебра $\mathrm{Vir}/\mathbb{C}c$ изоморфна алгебре $\mathrm{Vect}(S^1)$ векторных полей на $\mathbb{C}$ с коэффициентами — многочленами Лорана ($L_p \mapsto z^{p+1}\frac{d}{dz}$). Поэтому алгебра Вирасоро — центральное расширение $\mathrm{Vect}(S^1)$.

Теорема 3.2. *Коцикл* (3.14) *определяет центральное расширение алгебры* $\mathrm{Vect}(S^1)$, *которое при* $(\lambda - 1/2)^2 \neq 1/12$ *эквивалентно алгебре Вирасоро. Центральный заряд соответствующего представления в пространстве полубесконечных форм равен* $12(\lambda - 1/2)^2 - 1$.

Доказательство.

Рассмотрим функционал φ: $\mathrm{Vect}(S^1) \to \mathbb{C}$, который на $z\dfrac{d}{dz}$ равен 1, а на остальных $z^{p+1}\dfrac{d}{dz}$ равен 0. Тогда

$$\varphi\left(\left[z^{p+1}\frac{d}{dz}, z^{q+1}\frac{d}{dz}\right]\right) = \begin{cases} -2p, & p+q=0, \\ 0, & p+q\neq 0. \end{cases}$$

Поэтому коцикл (3.14) когомологичен коциклу

$$\omega(L_p^{\lambda,\mu}, L_q^{\lambda,\mu}) = \begin{cases} \dfrac{12(\lambda-1/2)^2-1}{12}(p^3-p), & p+q=0, \\ 0, & p+q\neq 0. \quad \square \end{cases} \tag{3.16}$$

Если же $(\lambda - 1/2)^2 = 1/12$, то коцикл (3.16) — нулевой, а получающееся центральное расширение тривиально. В этих случаях (т.е. при $\lambda = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$) представление алгебры Вирасоро в пространстве $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$ происходит из линейного представления в том же пространстве алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$.

Представляют интерес коммутационные соотношения операторов $L_p^{\lambda,\mu}$ с операторами E_k, введенными в предыдущем разделе.

Предложение 3.5. *Пусть операторы* $L_p^{\lambda,\mu}$ *заданы формулами* (3.13). *Имеют место следующие равенства*:

$$\begin{gathered} [L_p^{\lambda,\mu}, E_k] = kE_{p+k}, \quad p+k\neq 0, \\ [L_p^{\lambda,\mu}, E_{-p}] = -pE_0 + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)p^2 + \left(\lambda + \mu - \frac{1}{2}\right)p. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Доказательство. Обозначим $\nu = \lambda + \mu$ и будем опускать для краткости верхний индекс в обозначении $L_p^{\lambda,\mu}$. Пусть сначала $0 \neq k \neq -p$, тогда, согласно формуле (3.7) и формуле (3.4) имеем:

$$[L_p, E_k] = \sum_{\alpha} \alpha [f_\alpha f^*_{p-\alpha}, E_k] + (\lambda p + \nu)[E_p, E_k] =$$
$$= \sum_{\alpha} \alpha(-f_{k+\alpha} f^*_{p-\alpha} + f_\alpha f^*_{p+k-\alpha}) = -\sum_{\alpha}(k+\alpha) f_{k+\alpha} f^*_{p-\alpha} +$$
$$+ \sum_{\alpha} \alpha f_\alpha f^*_{p+k-\alpha} + k \sum_{\alpha} f_{k+\alpha} f^*_{p-\alpha} = kE_{p+k}.$$

При $k = 0$, $p \neq 0$ и $k \neq 0$, $p = 0$ вычисления аналогичны. При $k = -p$ имеем:

$$[L_p, E_{-p}] = \sum_{\alpha<0} \alpha [f_\alpha f^*_{p-\alpha}, E_{-p}] -$$
$$- \sum_{\alpha \geqslant 0} \alpha [f^*_{p-\alpha} f_\alpha, E_{-p}] + (\lambda p + \nu)[E_p, E_{-p}] =$$
$$= -\sum_{\alpha<0} \alpha f_{-p+\alpha} f^*_{p-\alpha} + \sum_{\alpha<0} \alpha f_\alpha f^*_{-\alpha} -$$
$$- \sum_{\alpha \geqslant 0} \alpha f^*_{-\alpha} f_\alpha + \sum_{\alpha \geqslant 0} \alpha f^*_{p-\alpha} f_{-p+\alpha} + (\lambda p^2 + \nu p).$$

Заменяя во втором и четвертом слагаемом $\alpha - p \mapsto \alpha$, получим:

$$[L_p, E_{-p}] = \sum_{\alpha<0} \alpha f_\alpha f^*_{-\alpha} - \sum_{\alpha \geqslant 0} \alpha f^*_{-\alpha} f_\alpha - \sum_{\alpha<-p} (\alpha + p) f_\alpha f^*_{-\alpha} +$$
$$+ \sum_{\alpha \geqslant -p} (\alpha + p) f^*_{-\alpha} f_\alpha + (\lambda p^2 + \nu p) =$$
$$= -p \sum_{\alpha<0} f_\alpha f^*_{-\alpha} + p \sum_{\alpha \geqslant 0} f^*_{-\alpha} f_\alpha -$$
$$- \sum_{\alpha=-p}^{-1} \alpha (f_\alpha f^*_{-\alpha} + f^*_{-\alpha} f_\alpha) + (\lambda p^2 + \nu p) =$$
$$= -pE_0 + (\lambda + \frac{1}{2})p^2 + (\nu - \frac{1}{2})p. \quad \square$$

3.3. Еще одно представление алгебры Вирасоро

Нетрудно заметить, что описанное в конце раздела 3.1 представление алгебры Гейзенберга H_λ весьма сходно с описанным в разделе 2.1 представлением алгебры Клиффорда в $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$: в обоих представлениях есть «старший вектор» (v и $\dots \wedge f_{-2} \wedge f_{-1}$ соответственно), на который операторы E_i (соответственно, f_i, f_i^*) с отрицательными i действуют нулем, а с положительными i — свободно, подчиняясь только соотношениям коммутативности (соответственно, антикоммутативности). Это наталкивает на мысль, что рассмотрение формул, подобных (2.13), (2.14), с заменой f на E приведет к построению интересных представлений в пространстве $\Lambda^{\frac{\infty}{2}+n}$. Это действительно так; построим таким образом представление алгебры Вирасоро.

Определим операторы $\widetilde{L}_p^{\alpha_0,\sigma}$ $(p = \pm 1, \pm 2, \dots)$ равенствами

$$\widetilde{L}_p^{\alpha_0,\sigma} = -\frac{1}{2}\sum_s E_s E_{p-s} + (\alpha_0 p + \sigma)E_p. \tag{3.18}$$

Нетрудно видеть, что ряд сходится при $p \neq 0$. При $p = 0$ ряд расходится, и нужно применить нормальное упорядочение:

$$\widetilde{L}_0^{\alpha_0,\sigma} = -\frac{1}{2}\sum_s {:}E_s E_{-s}{:} + \sigma E_0 \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\sum_{s\geqslant 0} E_s E_{-s} - \frac{1}{2}\sum_{s<0} E_{-s}E_s + \sigma E_0. \tag{3.19}$$

Лемма 3.2.

$$[\widetilde{L}_p^{\alpha_0,\sigma}, E_k] = \begin{cases} kE_{p+k}, & k \neq -p, \\ -pE_0 + (\alpha_0 p^2 + \sigma p), & k = -p. \end{cases} \tag{3.20}$$

Доказательство. Будем опускать верхний индекс в обозначении $\widetilde{L}_p^{\alpha_0,\sigma}$. При $p \neq 0$ имеем в силу (3.4)

$$[\widetilde{L}_p, E_k] = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}[E_k, E_\alpha E_{p-\alpha}] + (\alpha_0 p + \sigma)[E_p, E_k] =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{s}[E_k, E_s]E_{p-s} + \frac{1}{2}\sum_{s} E_s[E_k, E_{p-s}] + (\alpha_0 p^2 + \sigma p)\delta_{-p,k} =$$
$$= \frac{1}{2}kE_{p+k} + \frac{1}{2}kE_{p+k} + (\alpha_0 p^2 + \sigma p)\delta_{-p,k} =$$
$$= kE_{p+k} + (\alpha_0 p^2 + \sigma p)\delta_{-p,k}.$$

При $p = 0$ (и $k \neq 0$):

$$[\widetilde{L}_0, E_k] = \frac{1}{2}\sum_{s\geqslant 0}[E_k, E_s E_{-s}] + \frac{1}{2}\sum_{s<0}[E_k, E_{-s}E_s] =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{s\geqslant 0}[E_k, E_s]E_{-s} + \frac{1}{2}\sum_{s\geqslant 0} E_s[E_k, E_{-s}] +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{s<0}[E_k, E_{-s}]E_s + \frac{1}{2}\sum_{s<0} E_{-s}[E_k, E_s] = kE_k.$$

(Два члена равны 0, а два других равны $kE_k/2$; какие именно члены зависит от знака k.) $\square$

Предложение 3.6. *При* $\alpha_0 = \lambda + 1/2$, $\sigma = \mu - 1/2$ *имеют место равенства* $L_p^{\lambda,\mu} = \widetilde{L}_p^{\alpha_0,\sigma}$.

Доказательство. Коммутационные соотношения (3.17) и (3.20) показывают, что при $\alpha_0 = \lambda + 1/2$, $\sigma = \mu - 1/2$ операторы $A_p = L_p^{\lambda,\mu} - \widetilde{L}_p^{\alpha_0,\sigma}$ коммутируют со всеми E_k. Согласно Следствию из теоремы 3.1 это означает, что операторы A_p умножают каждый базисный вектор на число, зависящее только от его заряда (и от p, разумеется).

Рассмотрим действие A_p на основное состояние $v = \cdots \wedge f_{n-2} \wedge \wedge f_{n-1}$ с зарядом n. Нетрудно заметить, что вектор vA_p является комбинацией базисных векторов с энергией, равной $U(v) + p$.

Поэтому при $p \neq 0$ вектор v не входит в разложение vA_p по стандартному базису, откуда $A_p = 0$. При $p = 0$ коэффициент при v в разложении vL_0 по стандартному базису равен $-\dfrac{n(n-1)}{2} + \mu n$, а аналогичный коэффициент для $\widetilde{L}_0$ равен $-\dfrac{n^2}{2} + \sigma n$. Поэтому в v не входит в разложение vA_0 по стандартному базису, и $A_0 = 0$. $\square$

Следствие. *Операторы* $\widetilde{L}_p^{\alpha_0,\sigma}$ *удовлетворяют коммутационным соотношениям*

$$[\widetilde{L}_p, \widetilde{L}_q] = \begin{cases} (q-p)\widetilde{L}_{p+q} & \text{при } p+q \neq 0, \\ -2p\widetilde{L}_0 + \left(\dfrac{1}{12} - \alpha_0^2\right) p^3 - \left(\dfrac{1}{12} - \sigma^2\right) p & \text{при } p+q = 0. \end{cases}$$

При $\alpha_0^2 \neq 1/12$ *операторы* $\widetilde{L}_p^{\alpha_0,\sigma}$ *определяют центральное расширение алгебры* Vect, *изоморфное алгебре Вирасоро. Центральный заряд соответствующего представления алгебры Вирасоро равен* $1 - 12\,\alpha_0^2$.

3.4. Нормализаторы алгебр Клиффорда и Гейзенберга

Напомним, что линейное пространство A с билинейной операцией $[\cdot,\cdot]$ называется *супералгеброй Ли*, если задана ее $\mathbb{Z}_2$-градуировка $A = A_0 \oplus A_1$, а суперкоммутатор $[\cdot,\cdot]$ обладает следующими свойствами. Пусть $x \in A$ имеет четность α, $y \in A$ — четность β, $z \in A$ — четность γ (четность считается равной 0 для элементов A_0 и 1 для элементов A_1). Тогда

1) $[x,y] + (-1)^{\alpha\beta}[y,x] = 0$ (суперкоммутативность);
2) $(-1)^{\alpha\beta}[[x,y],z] + (-1)^{\beta\gamma}[[y,z],x] + (-1)^{\gamma\alpha}[[z,x],y] = 0$ (супертождество Якоби).

Обыкновенные алгебры Ли можно рассматривать как частный случай супералгебр — в алгебрах Ли все элементы четные.

Представим пространство $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$ полубесконечных форм в виде прямой суммы двух подпространств $\Lambda^{\frac{\infty}{2}+2k}$ и $\Lambda^{\frac{\infty}{2}+2k+1}$, порожденных векторами стандартного базиса с, соответственно, четным и нечетным зарядом. Тем самым множество $\mathrm{End}(\Lambda^{\frac{\infty}{2}})$ превращается в супералгебру Ли: четными считаются преобразования, сохраняющие четность заряда, а нечетными — меняющие ее. Суперкоммутатор $[A, B]$ определяется формулой $AB-(-1)^{\alpha\beta}BA$, где α — четность A, а β — четность B.

Пусть $\mathfrak{g}$ — супералгебра Ли и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — ее подалгебра. *Нормализатором* $\mathrm{Norm}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ подалгебры $\mathfrak{h}$ в супералгебре $\mathfrak{g}$ называется совокупность всех элементов $x \in \mathfrak{g}$, для которых

$$[x, h] \in \mathfrak{h} \quad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Иными словами $\mathrm{Norm}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ можно определить как наибольшую подалгебру $\mathfrak{g}$, содержащую $\mathfrak{h}$ в качестве нормальной подалгебры.

Возьмем в качестве $\mathfrak{g}$ супералгебру Ли $\mathrm{End}(\Lambda^{\frac{\infty}{2}})$, а в качестве $\mathfrak{h}$ — ее подалгебру, порожденную единичным оператором и операторами f_i, f_i^*. Как обычно, символом $\mathfrak{h}_0$ обозначим четную часть $\mathfrak{h}$ (она одномерна), а символом $\mathfrak{h}_1$ — нечетную.

По определению нормализатора, всякий элемент $x \in \mathrm{Norm}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ определяет линейное преобразование $\mathrm{ad}_x \colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$, действующее по формуле $h \mapsto [x, h]$. Нормализатор также можно разбить в сумму четной и нечетной частей. При этом нечетная часть $\mathrm{Norm}_1(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ нормализатора действует на $\mathfrak{h}_0$ нулем, а $\mathfrak{h}_1$ переводит в $\mathfrak{h}_0$. Четная часть $\mathrm{Norm}_0(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ нормализатора также действует на $\mathfrak{h}_0$ нулем, а $\mathfrak{h}_1$ переводит в себя. Тем самым, элементу $A \in \mathrm{Norm}_1(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ соответствует функционал $\mu_A \in \mathfrak{h}_1^*$, заданный равенством $[A, h] = \mu_A(h)\,\mathrm{Id}$ (при $h \in \mathfrak{h}_1$), а элементу $A \in \mathrm{Norm}_0(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ соответствует линейное преобразование $\nu_A = \mathrm{ad}_A|_{\mathfrak{h}_1}$.

Вычислим сначала нечетную часть нормализатора.

Предложение 3.7. *Нечетная часть* $\mathrm{Norm}_1(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ *нормализатора состоит из выражений вида* $\sum\limits_k(\alpha_k f_k + \beta_k f_k^*)$*, где для некоторого целого* N *коэффициенты* $\alpha_k = \beta_k = 0$ *при* $k > N$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{Norm}_1(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. Положим $\alpha_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mu_A(f_{-k}^*)$, $\quad \beta_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mu_A(f_{-k})$. Пусть теперь $v \in \Lambda^{\frac{\infty}{2}}$ — вакуумный вектор, а $N \in \mathbb{Z}$ неотрицательно и таково, что $vAf^*_{-k} = 0$ при $k > N$ (нетрудно видеть, что такое N обязательно существует). Тогда $\alpha_k v = v(Af^*_{-k} + f^*_{-k}A) = vAf^*_{-k} = 0$, т.е. $\alpha_k = 0$. Аналогично доказывается равенство $\beta_k = 0$ при достаточно больших k.

Рассмотрим теперь оператор $\widetilde{A} = \sum\limits_k (\alpha_k f_k + \beta_k f_k^*)$, где α_k, β_k определены выше. Тогда разность $A - \widetilde{A}$ — оператор на $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}$, антикоммутирующий со всеми f_i и f_i^*. Такой оператор обязательно равен нулю. $\square$

Перейдем теперь к описанию четной части нормализатора. Формула (2.7) задает на $\mathfrak{h}_1$ симметрическую билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Зафиксируем подпространство $V \subset \mathfrak{h}$, порожденное f_i, f_i^* с $i < 0$.

Предложение 3.8. *Для всякого* $A \in \mathrm{Norm}_0(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ *оператор* ν_A *является* V*-конечным и сохраняет форму* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Доказательство. Сохранение формы вытекает из коммутационных соотношений между элементами алгебры Клиффорда. Пусть $A \in \mathrm{Norm}_0(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. Проверим, например, сохранение формы для двух элементов вида f_i (напомним, что коммутатор двух нечетных элементов есть $xy + yx$):

$$\begin{aligned}&\langle \nu_A f_i, f_j \rangle + \langle f_i, \mathrm{ad}_A\, f_j \rangle = [[x, f_i], f_j] + [f_i, [x, f_j]] = \\ &= x f_i f_j - f_i x f_j + f_j x f_i - f_j x f_i + f_i x f_j - f_i f_j x + x f_j f_i - f_j x f_i = 0.\end{aligned}$$

Вычисления при замене f_i на f_i^* аналогичны.

Для доказательства V-конечности возьмем такое $N > 0$, что при всех $k < 0$, $j > N$ выполнено равенство $vAf_k f^*_{-j} = 0$, где v — вакуумный вектор (нетрудно видеть, что такое N существует). Тогда $v[Af_k, f^*_{-j}] = vAf_k f^*_{-j} + vf^*_{-j}Af_k = 0$, откуда видно, что при $k < 0$ в разложении вектора Af_k по базису f_i, f_i^* отсутствуют векторы f_i с $i > N$. Отсутствие векторов f_i^* с $i > N$, а также соответствующий факт про Af_k^* доказываются аналогично. $\square$

Явный вид четной части нормализатора таков:

Предложение 3.9. *Четная часть* $\mathrm{Norm}_0(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ *нормализатора состоит из всех операторов вида*

$$A = M\,\mathrm{Id} + \sum_{i,j} a_{ij} f_i f_j + \sum_{i,j} b_{ij} f_i f_j^* + \sum_{i,j} c_{ij} f_i^* f_j^*, \qquad (3.21)$$

где $a_{ij} = -a_{ij}$, $c_{ij} = -c_{ij}$, *матрица* b_{ij} *является* V*-конечной в смысле раздела* 2.4, *а для матриц* a_{ij} *и* c_{ij} *найдется такое* N, *что* $a_{ij} = c_{ij} = 0$ *при* $i > N$ или $j > N$.

Доказательство.

Положим по определению $a_{ij} = [Af_i, f_{-j}^*]$, $b_{ij} = [Af_i, f_{-j}]$, $c_{ij} = [Af_i^*, f_{-j}^*]$, и обозначим $\widetilde{A}$ квадратичное выражение в правой части формулы (3.21). Условия конечности на матрицы a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} следуют из предложения 3.8. Из того же предложения следует, что оператор $A - \widetilde{A}$ коммутирует со всеми f_i, f_i^* и поэтому, согласно предложению 2.3, равен $M\,\mathrm{Id}$. □

Замечание. ad можно рассматривать как отображение (гомоморфизм, разумеется) $\mathrm{Norm}_0(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) \to \mathfrak{o}_V(\mathfrak{h}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, где ортогональная алгебра $\mathfrak{o}_V(\mathfrak{h}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ состоит из V-конечных линейных преобразований $\mathfrak{h}_1$, сохраняющих форму (2.7). Из предложения 2.3 следует, что ядро этого отображения одномерно (состоит из кратных единичного оператора), и поэтому $\mathrm{Norm}_0(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ является центральным расширением ортогональной алгебры. Можно показать, что соответствующий коцикл равен $2\omega_P$, где P — естественный проектор на подпространство V. Выражения (3.21) задают представление этого центрального расширения и, тем самым, проективное представление ортогональной алгебры.

Аналогичную конструкцию можно провести с заменой операторов f_i на E_i (ср. раздел 3.3). Для этого рассмотрим пространство $\mathcal{H}$ с базисом E_i, $i \in \mathbb{Z}$, и кососимметрическую билинейную форму $(\cdot,\cdot)$, заданную формулой (3.6). Построим соответствующую алгебру Гейзенберга $\mathrm{Heis}(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$. В данном случае мы имеем дело с «чистой» алгеброй Ли, без нечетной компоненты. В качестве $\mathfrak{g}$ возьмем алгебру Ли линейных преобразований пространства представления H_λ (см. раздел 3.1), а в качестве $\mathfrak{h}$ — пространство $\mathcal{H}$, которое является подалгеброй алгебры Гейзенберга. Символом $V \subset \mathcal{H}$ обозначим пространство с базисом E_i, $i < 0$. Результаты о нормализаторе $\mathrm{Norm}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ получаются точно так же, как в предыдущем случае, поэтому приведем только формулировку:

Предложение 3.10. *Нормализатор* $\mathrm{Norm}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ *состоит из всех выражений вида*

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_i E_j + \sum_k b_k E_k + M\,\mathrm{Id}, \tag{3.22}$$

где матрица a_{ij} *— симметрическая и* V*-конечная, а коэффициенты* b_k *равны нулю при достаточно большом положительном* k*. Присоединенные преобразования* $\mathrm{ad}_A \colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ *при* $A \in \mathrm{Norm}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ *сохраняют форму* $(\cdot,\cdot)$*. Любое* V*-конечное преобразование* $B \colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$*, сохраняющее форму, имеет вид* ad_A *для некоторого* $A \in \mathrm{Norm}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$*.*

Иными словами операторы ad_A, $A \in \mathrm{Norm}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$, образуют симплектическую алгебру $\mathfrak{sp}_V(\mathfrak{h}, (\cdot,\cdot))$. Отображение ad задает ее центральное расширение, а формулы (3.22) — представление этого расширения и, тем самым, проективное представление симплектической алгебры. Можно показать, что соответствующий коцикл равен $-\omega_P$, где P — естественный проектор на подпространство V.

Поскольку представление H_λ (при λ целом) может быть реализовано в пространстве полубесконечных форм (см. раздел 3.3), возникает вопрос о пересечении построенных проективных представлений ортогональной и симплектической алгебры. Такому пересечению, помимо самих операторов E_k, принадлежат определенные в разделе 3.2 операторы L_p — это следует из сравнения формул (3.10), (3.18), (3.21) и (3.22). Оказывается, что этим пересечение, по существу, исчерпывается.

Предложение 3.11. *Всякий оператор* $A \in \mathrm{End}(\Lambda^{\frac{\infty}{2}})$, *принадлежащий пересечению образов описанных выше проективных представлений алгебр* $\mathfrak{o}_V$ *и* $\mathfrak{sp}_V$, *имеет вид* $M\,\mathrm{Id} + \sum_k(\alpha_k L_k + +\beta_k E_k)$, *где для некоторого* $N > 0$ *выполнено равенство* $\alpha_k = \beta_k = 0$ *при* $k > N$.

Доказательство. Рассмотрим оператор вида (3.21), принадлежащий указанному пересечению. Тем самым, его коммутатор с оператором E_k должен выражаться как линейная комбинация операторов E_k. Поскольку операторы E_k сохраняют заряд, для этого необходимо, чтобы $a_{ij} = c_{ij} = 0$. Коммутатор теперь выражается формулой

$$[A, E_k] = \sum_{i,j}(b_{i-k,j} - b_{i,j-k}) f_i f_j^*.$$

Коммутатор $[A, E_k]$ является линейной комбинацией E_s тогда и только тогда, когда выражение $p_{ij} = b_{i-k,j} - b_{i,j-k}$ зависит только от $i + j$. Отсюда получаем, что найдутся такие константа u и последовательность μ_s, что $b_{i,j} = ui + \mu_{i+j}$, откуда и следует требуемое утверждение. $\square$

§4. Вертексные операторы

4.1. Бозон-фермионное соответствие

Рассмотрим подробнее представление H_λ алгебры Гейзенберга, введенное в разделе 3.1. Для базисного вектора $E_{i_1}\dots E_{i_k}v_\lambda$, $i_1 \leqslant \dots \leqslant i_k$ назовем его *энергией* величину $i_1+\dots+i_k$. Представление H_n, где $n\in\mathbb{Z}$, реализуется в пространстве $\Lambda^{\frac{\infty}{2}+n}$ полубесконечных форм заряда n. Заметим, что введенное здесь определение энергии отличается на константу от того, которое было принято в §2: по теперешнему определению энергия основного состояния v_λ равна нулю, в то время как энергия вектора $\dots\wedge f_{n-2}\wedge f_{n-1}$ равна $n(n-1)/2$.

Назовем набор операторов $g_s^{(\alpha,\lambda)}\colon H_\alpha\to H_{\alpha+\lambda}$ $(s\in\mathbb{Z})$ *системой парафермионных операторов* (происхождение названия вскоре выяснится), если этот набор обладает следующими свойствами:

1. Оператор $g_s^{(\alpha,\lambda)}$ увеличивает энергию на s.

2. Выполнены коммутационные соотношения

$$[E_k, g_s^{(\alpha,\lambda)}] = \lambda g_{s+k}^{(\alpha,\lambda)}.$$

3. $g_0^{(\alpha,\lambda)}v_\alpha = v_{\alpha+\lambda}$.

Коммутационные соотношения 2 можно переписать в следующей эквивалентной форме. Пусть U — представление алгебры Гейзенберга с базисом u_i, в котором центральный элемент действует нулем, а операторы E_k — по формуле $E_ku_i=\lambda u_{i+k}$. Тогда коммутационные соотношения означают, что набор $\{g_s^{(\alpha,\lambda)}\}$ парафермионных операторов определяет гомоморфизм представлений $H_\alpha\otimes U\to H_{\alpha+\lambda}$.

Для удобства дальнейших рассуждений введем формальную переменную z и рассмотрим *вертексный оператор*, определенный равенством $g^{(\alpha,\lambda)}(z) = \sum\limits_{s\in\mathbb{Z}} g_s^{(\alpha,\lambda)}z^{-s}$. Коммутационное соотношение 2 теперь принимают вид

2$'$. $[E_k, g^{(\alpha,\lambda)}(z)] = \lambda z^k g^{(\alpha,\lambda)}(z)$.

Теорема 4.1. *Для всех α, λ вертексный оператор $g^{(\alpha,\lambda)}$ существует и единствен.*

Доказательство. Для доказательства существования рассмотрим оператор $D_\alpha^\lambda\colon H_\alpha \to H_{\alpha+\lambda}$, который переводит v_α в $v_{\alpha+\lambda}$ и коммутирует со всеми E_i, $i \neq 0$. Определим теперь вертексный оператор $g^{(\alpha,\lambda)}(z)$ равенством

$$g^{(\alpha,\lambda)}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\lambda\sum_{k<0}\frac{E_k}{k}z^{-k}\right) D_\alpha^\lambda \exp\left(-\lambda\sum_{k>0}\frac{E_k}{k}z^{-k}\right). \quad (4.1)$$

Свойства 1 и 3 очевидны. Для доказательства свойства 2 обозначим первую экспоненту в (4.1) $E_-(z)$, а вторую $E_+(z)$. Из коммутационных соотношений (3.4) следует, что $[E_i, E_-(z)] = 0$, $[E_i, E_+(z)] = \lambda z^i E_+(z)$ при $i < 0$, и $[E_i, E_-(z)] = \lambda z^i E_-(z)$, $[E_i, E_+(z)] = 0$ при $i > 0$. Что касается E_0, то он коммутирует с $E_+(z)$ и $E_-(z)$, а коммутатор $[D_\alpha^\lambda, E_0]$ равен λD_α^λ. Обозначая правую часть равенства (4.1) $\widetilde{g}(z)$, получим, что для всякого $i \in \mathbb{Z}$

$$[E_i, \widetilde{g}(z)] = \lambda z^i \widetilde{g}(z).$$

Для доказательства единственности покажем сначала, что действие операторов g_s на основное состояние определено однозначно. Для оператора g_0 это так по условию. Кроме того, $g_s v = 0$ при $s < 0$ в силу свойства 1. Пусть векторы $g_s v$ известны при $s < k$. Тогда в силу свойства 2 имеем при $i > 0$:

$$E_{-i} g_k v = g_k E_{-i} v + \lambda g_{k-i} v = \lambda g_{k-i} v,$$

т.е. действие E_{-i} на $g_k v$ определено однозначно. По определению представления H_λ, вектор $g_k v$ равен $P_k(E)v$ для некоторого многочлена P_k. Тогда из коммутационных соотношений следует, что $E_{-i} P_k(E) v = -i\dfrac{\partial P_k(E)}{\partial E_i} v$ и, следовательно, мы можем однозначно определить все частные производные многочлена P_k. Таким образом, этот многочлен известен нам с точностью до константы. Но, согласно свойству 1, P_k должен быть однородным, и поэтому неоднозначность отсутствует вовсе.

Тем самым, мы знаем вектор $g_s v$ для всех s. Теперь действие g_k на все остальные векторы однозначно определяется из коммутационных соотношений. Действительно, пусть $w = E_{i_1} \dots E_{i_s} v$, и пусть для всех $l < s$ и всех k действие g_k на векторы вида $E_{i_1} \dots E_{i_l} v$ известно. Тогда вектор $g_k w = E_{i_1}(g_s E_{i_2} \dots E_{i_s} v) + \lambda g_{k+i_1} E_{i_2} \dots E_{i_s} v$ также определен однозначно. $\square$

Следствие. *Выполнено коммутационное соотношение*

$$g_k^{(p,\alpha)} D_{p+\alpha}^{\beta} = D_p^{\alpha} g_k^{(p+\alpha,\beta)}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что операторы $(D_p^{\alpha})^{-1} g_k^{(p,\alpha)} D_{p+\alpha}^{\beta}$ обладают всеми свойствами парафермионных операторов $H_{p+\alpha} \to H_{p+\alpha+\beta}$. $\square$

Замечание. Из свойства 1 вытекает, что $g_0^{(\alpha,\lambda)} v_\alpha = \mu v_{\alpha+\lambda}$ для некоторой константы μ. Из доказательства теоремы 4.1 видно, что условия 1 и 2 задают одномерное пространство операторов, параметризованное множителем μ.

Воспользуемся теоремой 4.1 для того, чтобы получить явное выражение парафермионных операторов при $\alpha = 0$ и целом $\lambda = n$ через операторы f_i.

Предложение 4.1. *Имеет место следующая формула*:

$$g_k^{(0,n)} = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k} \frac{P_n(\alpha_1, \alpha_2+1, \dots, \alpha_n+n-1)}{P_n(0,1,\dots,n-1)} f_{\alpha_1} f_{\alpha_2+1} \cdots f_{\alpha_n+n-1}, \tag{4.3}$$

где $P_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)$ *— определитель Вандермонда*; $P_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1$.

Для доказательства нам потребуется

Лемма 4.1. *Для всякого* $t \in \mathbb{C}$

$$P_n(\alpha_1+t, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \dots + P_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n+t) = \\ = nP_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Многочлен

$$Q_t(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\sum_{s=1}^{n}(P_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_s+t,\ldots,\alpha_n)-P_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n))$$

кососимметричен по всем α_i. Отсюда следует, что он делится на $P_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Степень его, однако, меньше степени P_n, откуда следует, что $Q_t(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\equiv 0$. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 4.1.

Обозначим теперь $\widetilde{g}_k^{(n)}$ правую часть формулы (4.3). Имеем:

$$\begin{aligned}
&P_n(0,1,\ldots,n-1)[E_i,\widetilde{g}_k^{(n)}]=\\
&\quad=\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k}[E_i,f_{\alpha_1}f_{\alpha_2+1}\ldots f_{\alpha_n+n-1}]\times\\
&\qquad\times P_n(\alpha_1,\alpha_2+1,\ldots,\alpha_n+n-1)=\\
&\overset{\text{по (3.7)}}{=}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k}\ \sum_{s=1}^{n}f_{\alpha_1}\ldots f_{\alpha_s+s-1+i}\ldots f_{\alpha_n+n-1}\times\\
&\qquad\times P_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n+n-1)=\\
&\quad=\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k+i}f_{\alpha_1}\ldots f_{\alpha_n+n-1}\times\\
&\qquad\times\sum_{s=1}^{n}P_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_s+s-1-i,\ldots,\alpha_n+n-1)=\\
&\overset{\text{по лемме 4.1}}{=}n\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k+i}f_{\alpha_1}\ldots f_{\alpha_n+n-1}P_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n+n-1)=\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad=nP_n(0,1,\ldots,n-1)\widetilde{g}_{k+i}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, операторы $\widetilde{g}_k^{(n)}$ обладают свойством 2. Свойства 1 и 3 очевидны. Поэтому, в силу теоремы 4.1, $\widetilde{g}_k^{(n)}=g_k^{(0,n)}$. $\square$

При $k=1$ получается, что на $\Lambda^{\frac{\infty}{2}+0}$ выполнено равенство $g_k^{(0,1)}=f_k$. Нетрудно видеть, что на $\Lambda^{\frac{\infty}{2}+n}$ нумерация парафермионных операторов и операторов f_i отличается на n: $g_k^{(n,1)}=f_{n+k}$.

Тем самым, имеет место такая формула:

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}} f_s z^{-s} = \exp\left(-\sum_{k<0}\frac{E_k}{k}z^{-k}\right) z^{E_0} D \exp\left(-\sum_{k>0}\frac{E_k}{k}z^{-k}\right), \quad (4.4)$$

где оператор D действует на полубесконечную форму $w = = \cdots \wedge f_{i_2} \wedge f_{i_1}$, прибавляя единицу ко всем i_p.

Формула (4.4) обращает выражения (3.2), (3.3) «бозонных» (т.е. коммутирующих) операторов E_k через «фермионные» (т.е. антикоммутирующие) операторы f_i, f_i^*. Поэтому формулу (4.4) называют *бозон-фермионным соответствием.*

Формулы, аналогичные (4.3) и (4.4), можно написать и для операторов f_i^*. В частности, имеет место формула

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}} f_s^* z^{-s} = \exp\left(\sum_{k<0}\frac{E_k}{k}z^{-k}\right) z^{-E_0} D \exp\left(\sum_{k>0}\frac{E_k}{k}z^{-k}\right). \quad (4.5)$$

Выведем теперь коммутационные соотношения для парафермионных операторов с операторами L_p — они понадобятся нам в дальнейшем. Вначале выведем одну вспомогательную формулу. А именно, применяя к равенству (4.1) дифференциальный оператор $z\dfrac{d}{dz}$, получим:

$$z\frac{d}{dz}g^{(\delta,\lambda)}(z) = \lambda\left(\left(\sum_{k<0}E_k z^{-k}\right)g^{(\delta,\lambda)}(z) + g^{(\delta,\lambda)}(z)\left(\sum_{k>0}E_k z^{-k}\right)\right).$$

Сравнивая коэффициенты при z^{-l} в левой и правой части этого равенства, получим:

$$-lg_l^{(\delta,\lambda)} = \lambda\left(\sum_{k<0}E_k g_{l-k}^{(\delta,\lambda)} + \sum_{k>0} g_{l-k}^{(\delta,\lambda)}E_k\right). \quad (4.6)$$

В дальнейшем символом L_p мы будем обозначать оператор, заданный формулами (3.18), (3.19) при $\alpha_0 = 0$, $\sigma = 0$.

Предложение 4.2. *Имеют место равенства*

$$[L_p, g_s^{(\delta,\lambda)}] = \big(s + p - \delta\lambda + (p-1)\lambda^2/2\big)g_{s+p}^{(\delta,\lambda)}. \quad (4.7)$$

Доказательство. Пусть $p \neq 0$. Мы будем опускать верхний индекс у парафермионных операторов. Имеем:

$$[L_p, g_s] = -\frac{1}{2}\sum_{k<0}[E_k E_{p-k}, g_s] - \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 0}[E_{p-k}E_k, g_s] =$$
$$= -\frac{\lambda}{2}\left(\sum_{k<0}(g_{s+k}E_{p-k} + E_k g_{s+p-k}) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k\geqslant 0}(g_{s+p-k}E_k + E_{p-k}g_{s+k})\right) =$$
$$\overset{\text{по (4.7)}}{=} -\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{s+p}{\lambda}g_{s+p} + \sum_{k<0} g_{s+k}E_{p-k} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k\geqslant 0} E_{p-k}g_{s+k} + g_{s+p}E_0\right).$$

Заменяя в оставшихся суммах $k \mapsto p-k$ и применяя еще раз формулу (4.7), получим:

$$[L_p, g_s] =$$
$$= -\frac{\lambda}{2}\left(-2\frac{s+p}{\lambda}g_{s+p} + g_{s+p}E_0 + E_0 g_{s+p} - \sum_{k=1}^{p}[E_k, g_{s+p-k}]\right) =$$
$$= (s+p+p\lambda^2/2)g_{s+p} - \frac{\lambda}{2}(g_{s+p}E_0 + E_0 g_{s+p}).$$

Из очевидного равенства $g_i E_0 + E_0 g_i = (2\delta+\lambda)g_i$, получим (4.7). Для $p = 0$ рассуждения проводятся так же — фактически мы с самого начала применили нормальное упорядочение. □

4.2. Парафермионные соотношения

Формула для бозон-фермионного соответствия показывает, что парафермионные операторы можно рассматривать как обобщение фермионных (т.е. антикоммутирующих) операторов f_i, f_i^* — отсюда и название. Наша цель в данном разделе состоит в том, чтобы получить соотношения между такими операторами, обобщающие соотношения антикоммутирования (2.8).

Назовем набор операторов $g_{kl}^{(p,\alpha,\beta)}\colon H_p \to H_{p+\alpha+\beta}$, $(k,l \in \mathbb{Z})$ *системой G-операторов*, если выполнены следующие условия:

1. Оператор $g_{kl}^{(p,\alpha,\beta)}$ повышает энергию на $k+l$.

2. Имеют место коммутационные соотношения

$$[E_s, g_{kl}^{(p,\alpha,\beta)}] = \alpha g_{k+s,l}^{(p,\alpha,\beta)} + \beta g_{k,l+s}^{(p,\alpha,\beta)}.$$

Примером системы G-операторов являются композиции $g_{kl}^{(p,\alpha,\beta)} = g_k^{(p,\alpha)} g_l^{(p+\alpha,\beta)}$. Из свойства 1 следует, что $g_{k,-k}^{(p,\alpha,\beta)} v_p = \mu_k v_{p+\alpha+\beta}$ для некоторой константы μ_k (ср. замечание после доказательства теоремы 4.1).

Предложение 4.3. *Для любой последовательности чисел μ_k $(k \in \mathbb{Z})$ существует и единственна система G-операторов, удовлетворяющая равенствам $g_{k,-k}^{(p,\alpha,\beta)} v_p = \mu_k v_{p+\alpha+\beta}$.*

Доказательство практически не отличается от доказательства теоремы 4.1. А именно, для доказательства существования определим операторы $g_{kl}^{(p,\alpha,\beta)}$ формальным рядом

$$\sum_{k,l} g_{kl}^{(p,\alpha,\beta)} z_1^{-k} z_2^{-l} \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\sum_{k<0} \frac{E_k}{k}(\alpha z_1^{-k} + \beta z_2^{-k})\right) \times$$
$$\times \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j z_1^{-j} z_2^{j}\right) D_p^{\alpha+\beta} \exp\left(-\sum_{k>0} \frac{E_k}{k}(\alpha z_1^{-k} + \beta z_2^{-k})\right),$$

после чего свойства 1, 2 и равенство $g_{k,-k}^{(p,\alpha,\beta)} v_p = \mu_k v_{p+\alpha+\beta}$ проверяются непосредственным вычислением.

Доказательство единственности производится с использованием свойства 2 в точности так же, как в теореме 4.1. $\square$

Вычислим константы μ_k для G-операторов вида $g_k^{(p,\alpha)} g_{-k}^{(p+\alpha,\beta)}$.

Предложение 4.4. *Производящая функция $\mu(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k t^k$ равна $(1-t)^{\alpha\beta}$.*

Ввиду важности этого факта приведем два доказательства.

П е р в о е д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно формуле (4.1) свободный член (зависящий от t) при разложении по степеням z выражения

$$A(z,t) = v_p \exp\left(\alpha \sum_{k<0} \frac{E_k}{k} t^k z^k\right) D_p^\alpha \exp\left(\alpha \sum_{k>0} \frac{E_k}{k} t^k z^k\right) \times \\ \times \exp\left(\beta \sum_{k<0} \frac{E_k}{k} z^k\right) D_{p+\alpha}^\beta \exp\left(\beta \sum_{k>0} \frac{E_k}{k} z^k\right)$$

равен $\mu(t) v_{p+\alpha+\beta}$. Поскольку операторы E_k при $k < 0$ действуют на основное состояние нулем, имеем:

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial t} = \alpha v_p \exp\left(\alpha \sum_{k<0} \frac{E_k}{k} t^k z^k\right) D_p^\alpha \left(\alpha \sum_{k>0} \frac{E_k}{k} t^k z^k\right) \times \\ \times \left(\sum_{l>0} E_l t^{l-1} z^l\right) \exp\left(\beta \sum_{k<0} \frac{E_k}{k} z^k\right) D_{p+\alpha}^\beta \exp\left(\beta \sum_{k>0} \frac{E_k}{k} z^k\right).$$

При действии операторов E_k с $k > 0$ на основное состояние получаются векторы с положительной энергией, которые для нас не представляют интереса. Поэтому свободный член в $\dfrac{\partial A(z,t)}{\partial t}$ такой же, как в выражении

$$\alpha v_p \exp\left(\alpha \sum_{k<0} \frac{E_k}{k} t^k z^k\right) D_p^\alpha \left(\alpha \sum_{k>0} \frac{E_k}{k} t^k z^k\right) \times \\ \times \sum_{l>0} t^{l-1} z^l \left[E_l, \exp\left(\beta \sum_{k<0} \frac{E_k}{k} z^k\right)\right] D_{p+\alpha}^\beta \exp\left(\beta \sum_{k>0} \frac{E_k}{k} z^k\right) = \\ = -\alpha\beta v_p \exp\left(\alpha \sum_{k<0} \frac{E_k}{k} t^k z^k\right) D_p^\alpha \left(\alpha \sum_{k>0} \frac{E_k}{k} t^k z^k\right) \times \\ \times \left(\sum_{l>0} t^{l-1}\right) \exp\left(\beta \sum_{k<0} \frac{E_k}{k} z^k\right) D_{p+\alpha}^\beta \exp\left(\beta \sum_{k>0} \frac{E_k}{k} z^k\right),$$

откуда

$$\mu'(t) = -\alpha\beta\,\frac{\mu(t)}{1-t}.$$

Из этого дифференциального уравнения и очевидного равенства $\mu(0) = 1$ вытекает нужное утверждение. $\square$

Второе доказательство опирается на коммутационные соотношения (4.7). Из определения операторов L_p следует, что в представлении H_δ оператор $L_1 + \delta E_1$ действует на основное состояние нулем: $(L_1 + \delta E_1)v = 0$. Применим к этому равенству оператор $g_k^{(p,\alpha)} g_{-k-1}^{(p+\alpha,\beta)}$:

$$\begin{aligned}
0 &= g_k^{(p,\alpha)} g_{-k-1}^{(p+\alpha,\beta)}(L_1 + \delta E_1)v = [L_1 + \delta E_1, g_k^{(p,\alpha)} g_{-k-1}^{(p+\alpha,\beta)}]v = \\
&= \big((k+1-p\alpha) g_{k+1}^{(p,\alpha)} g_{-k-1}^{(p+\alpha,\beta)} + (-k-1+1-(p+\alpha)\beta) \times \\
&\qquad \times g_k^{(p,\alpha)} g_{-k}^{(p+\alpha,\beta)} + p\alpha g_{k+1}^{(p,\alpha)} g_{-k-1}^{(p+\alpha,\beta)} + p\beta g_k^{(p,\alpha)} g_{-k}^{(p+\alpha,\beta)}\big)v = \\
&= ((k+1)\mu_{k+1} - (k-\alpha\beta)\mu_k)v.
\end{aligned}$$

Отсюда $\mu_{k+1} = \dfrac{k-\alpha\beta}{k+1}\mu_k$. Поскольку равенство $\mu_0 = 1$ вытекает из свойства 3 парафермионных операторов, мы получаем требуемое утверждение. $\square$

Теперь мы готовы вывести соотношения между вертексными операторами. А именно, пусть ν_0, ν_1, … — коэффициенты в разложении по степеням t выражения $(1-t)^{-\alpha\beta}$. Рассмотрим операторы

$$g_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s \geqslant 0} \nu_s g_{k-s}^{(p,\alpha)} g_{k+s}^{(p+\alpha,\beta)}.$$

Нетрудно видеть, что это — система G-операторов. Из равенства $(1-t)^{\alpha\beta}(1-t)^{-\alpha\beta} = 1$ и предложения 4.4 следует, что $v_p g_{00} = v_{p+\alpha+\beta}$ и $v_p g_{k,-k} = 0$ при $k \neq 0$. С другой стороны, $g'_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} g_{lk}$ тоже составляют систему G-операторов, и $v_p g'_{k,-k} = v_p g_{k,-k}$ для любого k. Из предложения 4.3 следует, что

$g_{lk} = g'_{kl} = g_{kl}$. Это и дает нужную систему так называемых *парафермионных перестановочных соотношений*:

$$\nu_0 g_k^{(p,\alpha)} g_l^{(p+\alpha,\beta)} + \nu_1 g_{k-1}^{(p,\alpha)} g_{l+1}^{(p+\alpha,\beta)} + \ldots = \\ = \nu_0 g_l^{(p,\beta)} g_k^{(p+\beta,\alpha)} + \nu_1 g_{l-1}^{(p,\beta)} g_{k+1}^{(p+\beta,\alpha)} + \ldots . \quad (4.8)$$

4.3. Специальные случаи парафермионных соотношений

Посмотрим, что дают парафермионные соотношения для конкретных α и β.

4.3.1. $\alpha, \beta = \pm 1$: алгебра Клиффорда

Пусть сначала $\alpha = \beta = 1$. Здесь $(1-t)^{-\alpha\beta} = 1 + t + t^2 + \ldots$, и соотношение принимает вид

$$g_k^{(p,1)} g_l^{(p+1,1)} + g_{k-1}^{(p,1)} g_{l+1}^{(p+1,1)} + \ldots = \\ = g_l^{(p,1)} g_k^{(p+1,1)} + g_{l-1}^{(p,1)} g_{k+1}^{(p+1,1)} + \ldots .$$

То же соотношение при замене $k \mapsto k-1, \ l \mapsto l+1$ дает

$$g_{k-1}^{(p,1)} g_{l+1}^{(p+1,1)} + g_{k-2}^{(p,1)} g_{l+2}^{(p+1,1)} + \ldots = \\ = g_{l+1}^{(p,1)} g_{k-1}^{(p+1,1)} + g_l^{(p,1)} g_k^{(p+1,1)} + \ldots ,$$

что в совокупности с предыдущим приводит к равенству

$$g_k^{(p,1)} g_l^{(p+1,1)} = -g_{l+1}^{(p,1)} g_{k-1}^{(p+1,1)}.$$

Формула (4.4) и предшествующее ей замечание о нумерации операторов g_k и f_i позволяет (при целом p) переписать последнее соотношение в виде $f_{p+k} f_{p+l+1} = -f_{p+l+1} f_{p+k}$, т.е. получить первую формулу (2.8) — соотношение антикоммутирования для операторов f_i.

Совершено аналогичные рассуждения при $\alpha = \beta = -1$ приводят к соотношению антикоммутирования для операторов f_i^*.

При $\alpha = 1,\ \beta = -1$ имеем $(1-t)^{-\alpha\beta} = 1-t$, и парафермионное соотношение конечно:

$$g_k^{(p,1)} g_l^{(p+1,-1)} - g_{k-1}^{(p,1)} g_{l+1}^{(p+1,-1)} = g_l^{(p,-1)} g_k^{(p-1,1)} - g_{l-1}^{(p,-1)} g_{k+1}^{(p-1,1)}.$$

Иными словами, оператор $g_k^{(p,1)} g_l^{(p+1,-1)} + g_{l-1}^{(p,-1)} g_{k+1}^{(p-1,1)}$ зависит только от суммы $k+l$; обозначим этот оператор u_{k+l}.

В силу свойства 2 операторов g_s имеем: $[E_r, u_s] = u_{r+s} - -u_{r+s} = 0$. Из равенства (4.2) получаем, что u_s коммутирует также и с D: $u_r D_p^1 = D_{p+1}^{-1} u_r$. Отсюда следует, что u_r является оператором умножения на константу. В силу свойства 1 операторов g_s оператор u_r увеличивает энергию на r, откуда сразу следует, что при $r \neq 0$ оператор u_r — нулевой. При $r = 0$ предложение 4.4 показывает, что $u_0 = 1$. Теперь при p целом с учетом формул (4.4), (4.5), а также замечания перед ними (о нумерации операторов g_i и f_i) получаем окончательно

$$f_{p+k} f_{-p+l}^* + f_{-p+l}^* f_{p+k} = \begin{cases} 1, & k+l = 0, \\ 0, & k+l \neq 0, \end{cases}$$

т.е. последнюю формулу в (2.8).

4.3.2. $\alpha, \beta = \pm\sqrt{2}$**: алгебра** $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$

Положим сначала $\alpha = \beta = \sqrt{2}$. В верхних индексах будем для краткости писать $(p, \sqrt{2}) = (1)$, $(p+\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (2)$. Поскольку $(1-t)^{-\alpha\beta} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k t^{k-1}$, соотношение принимает вид:

$$(A_{kl}): \quad g_k^{(1)} g_l^{(2)} + 2 g_{k-1}^{(1)} g_{l+1}^{(2)} + \ldots = g_l^{(1)} g_k^{(2)} + 2 g_{l-1}^{(1)} g_{k+1}^{(2)} + \ldots.$$

Вычитая из соотношения (A_{kl}) соотношение $(A_{k-1,l+1})$, получим:

$$(B_{kl}): \quad g_k^{(1)} g_l^{(2)} + g_{k-1}^{(1)} g_{l+1}^{(2)} + \ldots = -g_{l+1}^{(1)} g_{k-1}^{(2)} - g_l^{(1)} g_k^{(2)} - \ldots$$

Теперь вычитание $(B_{k-1,l+1})$ из (B_{kl}) дает соотношение

$$g_k^{(1)} g_l^{(2)} = g_{l+2}^{(1)} g_{k-2}^{(2)}.$$

Определим теперь на прямой сумме представлений $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H_{k\sqrt{2}}$ операторы e_i формулами $e_i|_{H_{k\sqrt{2}}} = g_{i+2k}^{(k\sqrt{2},\sqrt{2})}$. Тогда предыдущее соотношение означает просто, что все операторы e_i коммутируют:

$$[e_i, e_j] = 0.$$

Рассмотрение случая $\alpha = \beta = -\sqrt{2}$ дает аналогичный результат для операторов f_i, заданных формулами $f_i|_{H_{k\sqrt{2}}} = g_{i-2k}^{(k\sqrt{2},-\sqrt{2})}$:

$$[f_i, f_j] = 0.$$

Для случая $\alpha = \sqrt{2}, \beta = -\sqrt{2}$ обозначим $(p, \sqrt{2}) = (1)$, $(p+\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (2)$, $(p, -\sqrt{2}) = (3)$, $(p-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (4)$. Имеем $(1-t)^{-\alpha\beta} = 1 - 2t + t^2$, и соотношение принимает вид

$$g_k^{(1)} g_l^{(2)} - 2g_{k-1}^{(1)} g_{l+1}^{(2)} + g_{k-2}^{(1)} g_{l+2}^{(2)} = g_l^{(3)} g_k^{(4)} - 2g_{l-1}^{(3)} g_{k+1}^{(4)} + g_{l-2}^{(3)} g_{k+2}^{(4)}.$$

Таким образом, оператор

$$u_{k,l} = g_k^{(1)} g_l^{(2)} - g_{k-1}^{(1)} g_{l+1}^{(2)} + g_{l-1}^{(3)} g_{k+1}^{(4)} - g_{l-2}^{(3)} g_{k+2}^{(4)}$$

обладает свойством $u_{k,l} = u_{k-1,l+1}$, и, тем самым, зависит только от суммы $k+l$: $u_{k,l} = s_{k+l}$.

Согласно свойству 2 операторов g_s коммутация s_{k+l} с E_i дает:

$$[E_i, s_{k+l}] = \sqrt{2}(u_{k+i,l} - u_{k,l+i}) = \sqrt{2}(s_{k+i+l} - s_{k+i+l}) = 0.$$

Кроме того, нетрудно видеть, что s_p коммутируют с операторами $D_{k\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$. Поэтому операторы s_p являются операторами умножения на константу. Аналогично рассуждениям предыдущего подраздела устанавливается, что

$$s_p = \begin{cases} 0, & p \neq 0, \\ 1, & p = 0. \end{cases}$$

Тем самым, операторы $v_{k,l} = g_k^{(1)} g_l^{(2)} - g_{l-2}^{(3)} g_{k+2}^{(4)}$ удовлетворяют при $k+l \neq 0$ равенству $v_{k,l} = v_{k-1,l+1}$ и, следовательно, зависят только от $k+l$:

$$g_k^{(1)} g_l^{(2)} - g_{l-2}^{(3)} g_{k+2}^{(4)} = h_{k+l}.$$

При $k+l=0$ получаем $v_{k,-k}-v_{k-1,1-k}=1$, откуда

$$g_k^{(1)}g_{-k}^{(2)}-g_{-k-2}^{(3)}g_{k+2}^{(4)}=h_0+k.$$

Опишем теперь операторы h_p. При $k+l\neq 0$ и $i+k+l\neq 0$ имеем:

$$\begin{aligned}[E_i,h_{k+l}]=\sqrt{2}(g_{k+i}^{(1)}g_l^{(2)}-g_k^{(1)}g_{l+i}^{(2)}+g_{l+i-2}^{(3)}g_{k+2}^{(4)}-g_{l-2}^{(3)}g_{k+i+2}^{(4)})=\\ =\sqrt{2}(h_{k+i+l}-h_{k+i+l})=0,\end{aligned}$$

а при $i=-(k+l)$:

$$\begin{aligned}[E_{-k-l},h_{k+l}]=\sqrt{2}(g_{-l}^{(1)}g_l^{(2)}-g_k^{(1)}g_{-k}^{(2)}+g_{-k-2}^{(3)}g_{k+2}^{(4)}-g_{l-2}^{(3)}g_{-l+2}^{(4)})=\\ =\sqrt{2}(k+l).\end{aligned}$$

Мы видим, что коммутационные соотношения h_p с E_i такие же, как у оператора $\sqrt{2}E_p$. Нетрудно видеть, что так же обстоит дело и для коммутационных соотношений с оператором $\mathcal{D}$. Поэтому $h_p=\sqrt{2}E_p$. Несложно проверить, что это равенство верно и при $p=0$.

Коммутационные соотношения h_p с операторами g_s таковы:

$$\begin{aligned}[h_p,g_s^{(1)}]=2g_{s+p}^{(1)},\quad [h_p,g_s^{(4)}]=2g_{s+p}^{(4)},\\ [h_p,g_s^{(2)}]=-2g_{s+p}^{(2)},\quad [h_p,g_s^{(3)}]=-2g_{s+p}^{(3)}.\end{aligned}$$

Сводя воедино все полученные формулы и применяя введенные выше обозначения e_i и f_i, получим следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned}&[e_i,e_j]=0,\\ &[f_i,f_j]=0,\\ &[e_i,f_j]=h_{i+j}+i\delta_{i,-j},\\ &[h_i,e_j]=2e_{i+j},\\ &[h_i,f_j]=-2f_{i+j}.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Эти формулы без дополнительного члена в средней строке представляют собой соотношения в алгебре Ли $\left((\mathfrak{sl}_2)^{S^1}\right)^{\mathrm{pol}}$ полиномиальных токов на окружности со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$. Вместе с дополнительным членом формулы (4.9) описывают центральное расширение указанной алгебры, которое обычно обозначается $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$.

Другое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ получается, если рассмотреть прямую сумму представлений $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H_{(k+1/2)\sqrt{2}}$.

Прямые суммы $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H_{k\sqrt{2}}$ и $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H_{(k+1/2)\sqrt{2}}$ весьма похожи на пространство полубесконечных форм — имеется возможность ввести в них базисы, состоящие из полубесконечных выражений. А именно, базис в $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H_{k\sqrt{2}}$ будут составлять выражения вида $\varepsilon_I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ldots \cdot e_{i_k} \cdot \ldots \cdot e_{i_1}$, где в последовательности I целых чисел $i_1 > i_2 > \ldots$ соседние члены отличаются не менее, чем на 2, и для достаточно большого N при $k > N$ выполнено равенство $i_k = -2k + 2c$, где $c \in \mathbb{Z}$ — константа (заряд), не зависящая от k (но своя для каждого базисного вектора). Для $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H_{(k+1/2)\sqrt{2}}$ описание будет такое же, но стабилизация будет происходить по нечетным числам: $i_k = -2k + 2c + 1$. Операторы e_i действуют на базисные векторы ε_I умножением. При этом, поскольку e_i коммутируют, новый сомножитель можно сразу поставить на надлежащее место. При этом, однако, может получиться небазисное выражение — в последовательности индексов i_s могут появиться соседние и даже одинаковые числа. В этом случае полученное выражение заменяется линейной комбинацией базисных с помощью соотношений (B_{kl}), которые в терминах операторов e_i имеют вид:

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}} e_s e_{k-s} = 0, \quad \forall k. \tag{4.10}$$

Что касается «понижающих» операторов f_i, то их действие на базис ε_I однозначно определяется коммутационными соотношениями (4.9). Следует отметить, что, в отличие от случая алгебры Клиффорда, действие f_i переводит базисный вектор в нетривиальную линейную комбинацию других базисных векторов и не сводится к простому дифференцированию по e_i.

Подробно конструкцию базиса из полубесконечных выражений мы рассмотрим в следующем подразделе.

4.3.3. $\alpha, \beta = \pm\sqrt{3}$: тождество Эйлера

Вычисления в этом подразделе похожи на случай $\alpha, \beta = \pm\sqrt{2}$, но более громоздки, и поэтому мы не будем приводить их полностью.

Пусть $\delta = 0, 1$ или 2. Введем на прямой сумме $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{C}_k$, где $\mathcal{C}_k = H_{(k+\delta/3)\sqrt{3}}$, операторы $A_s \stackrel{\mathrm{def}}{=} g_{s-3k-\delta}^{((k+\delta/3)\sqrt{3},\sqrt{3})}$, $B_s = g_{s+3k+\delta}^{((k+1+\delta/3)\sqrt{3},-\sqrt{3})}$.

Рассматривая парафермионные соотношения (4.8) в случае $\alpha, \beta = \sqrt{3}$ и применяя трижды «разностный» трюк, аналогичный примененному в предыдущих подразделах, мы докажем, что операторы A_i антикоммутируют:

$$A_i A_j + A_j A_i = 0 \tag{4.11}$$

и удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_{\alpha+\beta=k} (\alpha-\beta) A_\alpha A_\beta = 0, \quad \forall k. \tag{4.12}$$

То же самое верно и для операторов B_i. Рассмотрение парафермионных соотношений для $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = -\sqrt{3}$ показывает, что антикоммутатор $A_i B_j + B_j A_i$ представляется в виде линейной комбинации операторов L_{i+j}, E_{i+j} и единичного оператора. Операторы A_i и B_i образуют представление так называемой $N = 2$-супералгебры.

Рассмотрим подробнее случай $\delta = 2$. В этом случае $A_0 B_0 + B_0 A_0 = -3L_0$, где

$$L_0|_{\mathcal{C}_k} = -\mathcal{U} - \frac{3k^2 - k}{2},$$

а $\mathcal{U}$ обозначает оператор энергии (умножающий каждый базисный вектор в каждом $\mathcal{C}_k$ на его энергию, в частности, действующий нулем на основное состояние). Нам будет удобно сдвинуть начало отсчета энергии, положив энергию основного состояния в $\mathcal{C}_k$ равной $(3k^2-k)/2$. Теперь «оператором энергии» будет как раз $-L_0$.

Соотношение антикоммутирования (4.11) означает, в частности, что $A_0^2=0$. Это позволяет рассматривать A_0 как дифференциал в комплексе

$$\ldots \xrightarrow{A_0} \mathcal{C}_0 \xrightarrow{A_0} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{A_0} \ldots.$$

Из свойства 1 операторов g_s следует, что оператор A_0 сохраняет энергию (в новом смысле!) и, таким образом, комплекс градуирован — разлагается в прямую сумму комплексов

$$\bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{C}^{(p)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{s=0}^{\infty} \left(\ldots \xrightarrow{A_0} \mathcal{C}_0^{(p)} \xrightarrow{A_0} \mathcal{C}_1^{(p)} \xrightarrow{A_0} \ldots\right), \tag{4.13}$$

где $\mathcal{C}_k^{(p)}$ означает линейное подпространство $\mathcal{C}_k$, порожденное базисными векторами энергии p. Пространства $\mathcal{C}_k^{(p)}$ конечномерны. Кроме того, каждый комплекс $\mathcal{C}^{(p)}$ содержит лишь конечное число ненулевых членов, поскольку наименьшая возможная энергия вектора из $\mathcal{C}_k$ равна $(3k^2-k)/2$. В частности, комплекс $\mathcal{C}^{(0)}$ имеет вид

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots.$$

Предложение 4.5. *Гомологии комплексов $\mathcal{C}^{(p)}$ при $p \neq 0$ тривиальны во всех размерностях. У комплекса $\mathcal{C}^{(0)}$ нулевые гомологии одномерны, а прочие — тривиальны.*

Доказательство. Утверждение про $\mathcal{C}^{(0)}$ очевидно. Пусть теперь $p \neq 0$, и пусть x — цикл (любой размерности) в комплексе $\mathcal{C}^{(p)}$: $A_0 x = 0$. Тогда $x = A_0 y$, где $y = B_0 x/(3p)$, то есть x является границей. $\square$

Для каждого комплекса $\mathcal{C}^{(p)}$ мы можем написать теперь тождество Эйлера–Пуанкаре:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \dim \mathcal{C}_k^{(p)} = \begin{cases} 0, & p \neq 0, \\ 1, & p = 0. \end{cases}$$

Умножая p-е равенство на q^p и суммируя по p, получим

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \sum_p q^p \dim \mathcal{C}_k^{(p)}.$$

Внутренняя сумма («характер» представления H_λ) уже вычислялась нами при доказательстве теоремы 3.1, она равна $q^{(3k^2-k)/2} \prod\limits_{l=1}^{\infty} \dfrac{1}{1-q^l}$ (первый множитель появился потому, что мы сдвинули начало отсчета энергии). Итого получаем тождество Эйлера

$$\prod_{l=1}^{\infty}(1-q^l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{(3k^2-k)/2}, \tag{4.14}$$

которое мы уже доказывали в разделе 1.2 (формула (1.10)).

Заметим, что и в разделе 1.2 и здесь тождество Эйлера было доказано применением формулы Эйлера–Пуанкаре к некоторому градуированному цепному комплексу. Рассмотренные комплексы, однако, не совпадают. Кроме того, дифференциал в комплексе, рассмотренном в разделе 1.2, является мономиальным — переводит каждый базисный вектор (диаграмму Юнга) в другой базисный вектор. Дифференциал же A_0 в комплексе (4.13) таким свойством не обладает. Иными словами, доказательство раздела 1.2 является «чисто комбинаторным» — устанавливается взаимно однозначное соответствие между диаграммами Юнга с k и $k+1$ строкой — а приведенное здесь доказательство имеет более сложную структуру.

Покажем теперь, как ввести в пространствах $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{C}_k$ базис, состоящий из полубесконечных форм. Пусть для определенности $\delta = 0$. Забудем на некоторое время о том, что операторы A_i происходят из парафермионных операторов, и будем просто искать представления алгебры Ли, заданной коммутационными соотношениями (4.11) и (4.12). Предположим, что в представлении имеется старший вектор v_k, на который A_i при $i < k$ действуют нулем. Это превратит соотношения (4.12) в конечные. Тогда представление — обозначим его $\mathcal{D}_k$ — является факторалгеброй грассмановой алгебры $\Lambda^*(A_{k+1}, A_{k+2}, \dots)$.

Из коммутационных соотношений (4.12) следует, что на вектор $v_k A_{k+1}$ операторы A_{k+2} и A_{k+3} действуют нулем. Более того, можно показать (читатель может сам восстановить подробности), что умножение на оператор A_{k+1} продолжается до гомоморфного *вложения* представлений $\mathcal{D}_k \hookrightarrow \mathcal{D}_{k+3}$. Теперь видно, что объединение $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_{3k}$ обладает базисом, состоящим из полубесконечных форм вида $\psi_I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \cdots \wedge A_{i_k} \wedge \cdots \wedge A_{i_1}$, где в последовательности I целых чисел $i_1 > i_2 > \dots$ соседние члены отличаются не менее чем на 3, и для достаточно большого N при $k > N$ выполнено равенство $i_k = -3k + 3c$, где $c \in \mathbb{Z}$ — константа (заряд), не зависящая от k (но своя для каждого базисного вектора). Операторы A_i действуют на базисные векторы ψ_I умножением — ср. предыдущий подраздел.

Теперь мы должны вычислить действие алгебры Гейзенберга в пространстве $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_{3k}$. Поскольку коммутационные соотношения операторов E_i с операторами A_j известны — это

$$[E_i, A_j] = \sqrt{3} A_{i+j}, \tag{4.15}$$

то достаточно определить действие E_i на основные состояния вида $v_k = \cdots \wedge A_{k-1} \wedge A_k$. Ясно, что при $i < 0$ оператор E_i действует нулем. Кроме того, правило Лейбница и формула (4.15) позволяют нам сразу определить действие E_k при k, кратном 3. Для вычисления действия остальных E_k воспользуемся следующим трюком.

Рассмотрим представление алгебры Вирасоро. Коммутационные соотношения L_i с A_j известны — см. раздел 4.1. Поэтому мы, как и в случае с алгеброй Гейзенберга, можем сразу вычислить действие операторов L_p, где $p < 0$ или делится на 3. Но теперь коммутационные соотношения (3.15) позволяют однозначно вычислить и все остальные L_p. Операторы E_k (с произвольным k) теперь однозначно определяются из коммутационных соотношений (3.20) — мы пользуемся тем, что при k, кратном 3, операторы E_k нам уже известны.

Сказанное частично приложимо и к коммутативному случаю, рассмотренному в предыдущем подразделе. А именно, заменяя грассманову алгебру $\Lambda^*(A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots)$ на симметрическую $S^*(e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots)$, мы получим упоминавшийся базис из полубесконечных выражений. Любопытно, однако, что вычислить действие операторов E_k описанным способом в этом случае нельзя — правило Лейбница не дает однозначного ответа даже при k, кратном 2 — случай коммутативный! Вычисление представления алгебры Гейзенберга в базисе ε_I — нерешенная задача.

4.3.4. $\alpha, \beta = \pm\sqrt{5}$: тождество Роджерса–Рамануджана

Здесь мы вынуждены ограничиться только формулировкой результатов.

Зафиксируем целое число δ, $0 \leqslant \delta \leqslant 4$, и пусть $\mathcal{C}_k = H_{(k+\delta/5)\sqrt{5}}$. Введем на прямой сумме $\mathcal{C} = \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{C}_k$ операторы $A_s \stackrel{\mathrm{def}}{=} g_{s-5k-\delta}^{((k+\delta/5)\sqrt{5},\sqrt{5})}$, $B_s \stackrel{\mathrm{def}}{=} g_{s+5k+\delta}^{((k+1+\delta/5)\sqrt{5},-\sqrt{5})}$. Рассмотрение парафермионных соотношений показывает, что операторы A_i антикоммутируют:

$$A_i A_j + A_j A_i = 0 \tag{4.16}$$

и удовлетворяют еще двум сериям бесконечных квадратичных соотношений: для всех $k \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{\alpha+\beta=k} (\alpha - \beta) A_\alpha A_\beta = 0,$$
$$\sum_{\alpha+\beta=k} (\alpha^3 - \beta^3) A_\alpha A_\beta = 0.$$

Это позволяет ввести в $\mathcal{C}$ базис, состоящий из полубесконечных форм, в которых соседние индексы отличаются не меньше, чем на 5, и при достаточно больших k выполнено равенство $i_k = -5k + 5c + \delta$.

В силу формулы (4.16) оператор A_0 удовлетворяет соотношению $A_0^2 = 0$, что превращает $\mathcal{C}$ в цепной комплекс. Пусть $\delta = 3$, а $\mathcal{U}$ — оператор энергии. Нетрудно видеть, что A_0 коммутирует с оператором L_0, который на $\mathcal{C}_k$ равен $\mathcal{U} + \dfrac{5k^2 + k}{2}$. Сдвинем в пространстве $\mathcal{C}_k$ начало отсчета энергии на $\dfrac{5k^2+k}{2}$, тогда L_0 будет новым оператором энергии, а дифференциал A_0 будет сохранять энергию. Тем самым комплекс $\mathcal{C}$ распадется в прямую сумму комплексов $\mathcal{C}^{(p)}$, порожденных векторами энергии p.

К сожалению, вычислить гомологии комплексов $\mathcal{C}^{(p)}$ значительно сложнее, чем в случае, описанном в предложении 4.5. Приведем ответ:

Предложение 4.6. *Гомологии комплексов $\mathcal{C}^{(p)}$ нетривиальны только в размерности 0. Характер $\sum\limits_{p=0}^{\infty} q^p \dim H_0(\mathcal{C}^{(p)})$ равен «бесконечному q-числу Фибоначчи» $f_\infty(q) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{q^{k^2}}{(q)_k}$.*

Тождество Эйлера–Пуанкаре для градуированному (по энергии) комплекса $\mathcal{C}$ дает теперь:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(q)_k} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k+1)/2}.$$

Применение тождества Якоби (1.8) с $q \mapsto q^{5/2}$, $x \mapsto q^{1/2}$ к правой части этого равенства приводит к тождеству Роджерса–Рамануджана (1.14) (ср. с последним этапом доказательства теоремы 1.3).

Рассмотрение комплекса $\mathcal{C}$ при $\delta = 4$ приводит к второму тождеству Роджерса–Рамануджана (1.16).

Доказательство тождества Роджерса–Рамануджана, план которого приведен здесь, не является «чисто комбинаторным» в смысле предыдущего подраздела, поскольку дифференциал A_0 не является мономиальным (в стандартном базисе). Простого комбинаторного доказательства тождества Роджерса–Рамануджана до настоящего времени не найдено. Такое доказательство должно содержать явную конструкцию взаимно однозначного соответствия между разбиениями числа n на части, размеры которых отличаются не менее чем на 2, и разбиениями того же числа n на части, размеры которых дают при делении на 5 остатки 1 или 4. Не исключено, что эту задачу можно решить, выбрав внутри комплекса $\mathcal{C}$ другой базис, в котором дифференциал A_0 станет мономиальным. Представляет также интерес поиск доказательства конечной формы тождества Роджерса–Раманужана (формулы (1.12)) на языке цепных комплексов.

Рассуждения, аналогичные приведенным здесь, можно провести для парафермионных операторов с $\alpha, \beta = \pm\sqrt{2p+1}$, для любого целого p. Таким образом получаются доказательства тождеств Гордона, обобщающих тождества Роджерса–Раманужана. Эти тождества читатель может найти в книге Г. Эндрюса «Теория разбиений» (М., Наука, 1982).

Предметный указатель