Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 11 сентября 1996 года

1. Докажите *неравенство Бернулли*:
$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad (n \text{ – натуральное}, x \geq -1).$$

2. Укажите такое натуральное $n > 1$, что $2^n > n^{1000}$.

3. Укажите такое натуральное n, что $1,0001^n > 1000000$.

4. Докажите, что $\sqrt[100]{2} < 1,01$.

5. При каком натуральном k величина $\frac{k^2}{1,001^k}$ максимальна?

   Определение. *Отношением* на множестве M называется подмножество множества пар $M \times M$. Отношение $R \subset M \times M$ называется *отношением эквивалентности*, если оно

   - *симметрично*, т.е. $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$;
   - *транзитивно*, т.е. $(x,y) \in R, (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$;
   - *рефлексивно*, т.е. $(x,x) \in R \quad \forall x \in M$.

   Множество попарно эквивалентных относительно R элементов множества M называется *классом эквивалентности*.

6. Дайте определение рационального числа как класса эквивалентности. Определите операции над рациональными числами.

   Определение. *Рациональным числом* называется целочисленная прямая на плоскости, проходящая через начало координат и не совпадающая с осью ординат.

7. Докажите эквивалентность приведенного определения рационального числа вашему. Определите сложение и умножение целочисленных прямых.

8. Что такое $\sqrt{2}$?

9. Докажите, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально.
   (Доказательство: $\sqrt{2}+\sqrt{3} = 1,41\ldots + 1,73\ldots = 3,14\ldots$ – иррационально.)

10. Докажите, что сумма $a_1\sqrt{b_1} + \ldots + a_k\sqrt{b_k}$ иррациональна, если a_i целые, а b_i различные положительные целые, свободные от квадратов.

11. Рационально ли число $\sin 20^o$?

12. Целочисленные точки на плоскости окружены кружками радиусом 10^{-10}. Докажите, что любая прямая, проходящая через начало координат, пересекает а) еще хотя бы один кружок; б) бесконечно много кружков.

13. Есть ли рациональные корни у многочленов а) $16+8x+2x^2+2x^3+x^4$; б) $6+2x^2+3x^3+6x^4$; в) $10+5x+10x^2+2x^4$?

14. Докажите, что существуют два иррациональных числа a и b, такие что а) $a+b$, ab рациональны; б) a^b рационально.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 18 сентября 1996 года

1. Докажите, что а) существует пара целых чисел m и n, такая что $|m+n\sqrt{2}| < 10^{-10}$; б) таких пар бесконечно много.

   Определение *ϵ-окрестностью* точки a называется множество точек $U_\epsilon(a) = \{x | a-\epsilon < x < a+\epsilon\}$. Точка a называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$ (обозначение: $a = \lim a_n$), если для любого $\epsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого, находятся в ϵ-окрестности точки a.

2. Сформулируйте, что означает, что число a *не* является пределом последовательности $\{a_n\}$. Докажите, что 1 не является пределом последовательности $\frac{1}{n}$.

3. Докажите, что у последовательности не может быть больше одного предела.

   Определение. Последовательность a_n называется *фундаментальной*, если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n, m > N \quad |a_n - a_m| < \epsilon$.

4. Докажите, что всякая последовательность, имеющая предел, фундаментальна.

5. Приведите пример фундаментальной последовательности на множестве рациональных чисел, не имеющей предела.

   Аксиома полноты в множестве действительных чисел.

   1) *Любая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку.*

   2) *Любая фундаментальная последовательность имеет предел.*

   3) *Любая монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.*

   4) *Любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.*

6. Докажите, что эти формулировки аксиомы полноты эквивалентны между собой.

7. Докажите, что ваша любимая модель действительных чисел удовлетворяет аксиоме полноты.

   Определение. *Предельной точкой* множества называется точка, в любой ϵ-окрестности которой содержится бесконечно много элементов этого множества.

8. Докажите, что предел последовательности является единственной предельной точкой этой последовательности.

9. Докажите, что у любой последовательности точек отрезка $[0, 1]$ имеется предельная точка.

10. Найдите предельные точки множеств

    а) $\frac{(2+(-1)^n)}{n}$; б) $\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n} |\ m, n \in \mathbb{N}\}$; в) $\{\sin n\}$.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 1-й курс 18 сентября 1996 года

Контрольная работа

1. $\lim a_n = \lim b_n = C$. Докажите, что предел последовательности $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ существует и равен C.

2. Укажите такое натуральное N, что для всех $n > N$ верно $\frac{n^4-3n}{2n^4+1} > 0,4$.

3. Докажите, что последовательность, имеющая предел, имеет наибольший или наименьший член.

4. Докажите существование пределов последовательностей и найдите эти пределы а) $\frac{n^{10}}{2^n}$; б) $\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}$; в) $\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}$.

5. Докажите, что из любой ограниченной последовательности вещественных чисел можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 2 октября 1996 года

1. Докажите, что если ряд $\sum a_n$ сходится, то $a_n \longrightarrow 0$.

2. При каких α сходится ряд $\sum \frac{1}{n^\alpha}$?

3. Сходятся ли ряды
$$\sum \frac{n^2 - 10n + 1}{n^3 + 17n}, \qquad \sum \frac{n^3}{n^5 - 17} ?$$

4. Докажите **критерий Даламбера**: пусть существует предел $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Тогда при $q > 1$ ряд $\sum a_n$ расходится, при $q < 1$ — сходится.

5. Докажите **критерий Коши**: пусть существует предел $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда при $q > 1$ ряд $\sum a_n$ расходится, при $q < 1$ — сходится.

6*. Сходятся ли ряды
$$\sum \frac{1}{n \ln n}, \qquad \sum \frac{1}{n \ln^2 n}, \qquad \sum \frac{1}{n \ln n \ln \ln n} ?$$

7. Докажите, что следующий ряд сходится и найдите его сумму
$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots$$
Переставьте члены ряда так, чтобы полученный ряд сходился к 7.

Определение. Ряд $\sum a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum |a_n|$.

8. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

9. Докажите, что при любой перестановке членов абсолютно сходящегося ряда его сумма не меняется.

10. Докажите следующую **теорему Римана**: если ряд сходится, но не абсолютно (говорят, *условно*), то можно переставить его члены так, чтобы полученный ряд сходился к любому наперед заданному числу.

11. Сходится ли, а если да, то абсолютно или нет следующий ряд
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots ?$$

12. Докажите, что абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать, $(\sum a_n)(\sum b_m) = \sum a_n b_m$. Что означает запись $\sum a_n b_m$? В каком порядке суммировать эту двухиндексную последовательность чисел?

13. Перемножьте следующие ряды
$$(1 + x + x^2 + \ldots)^2 ,$$
$$(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots)(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots) .$$
Постарайтесь догадаться, чему равна сумма ряда $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 9 октября 1996 года

Определение. Последовательность a_n в метрическом пространстве M с метрикой ρ называется *сходящейся* к точке $a \in M$, если $\forall \epsilon{>}0\ \exists N\ \forall n{>}N\ \rho(a_n, a){<}\epsilon$. Последовательность называется *фундаментальной*, если $\forall \epsilon{>}0\ \exists N\ \forall m, n{>}N\ \rho(a_n, a_m){<}\epsilon$.

1. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Метрическое пространство *полно*, если всякая фундаментальная последовательность сходится.

Проверьте, являются ли полными следующие пространства:

2. Пространство $M = \mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$.

3. Пространство 10-адических чисел, то есть формальных бесконечных последовательностей
$$\cdots a_3\, a_2\, a_1\, a_0\ , \quad a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}\ .$$
Расстояние определяется равенством $\rho(a, b) = 10^{-k}$, если последние k цифр у чисел a и b совпадают.

4. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$ с обычным расстоянием.

5. График функции $y = \sin \frac{1}{x}$, рассматриваемый как подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$.

Определение. *Окрестностью* точки $x \in M$ называется произвольный открытый шар $U = \{y \in M,\ \rho(x, y) < r\}$. Подмножество $A \subset M$ *открыто*, если всякая точка этого множества содержится в A вместе с некоторой окрестностью.

6. Открыто ли подмножество в $\mathbb{R}^2$, заданное неравенством $(x^2 + y^2)^2 < x^2 - y^2$?

7. (a) Покажите, что объединение любого семейства открытых подмножеств открыто.
   (b) Верно ли то же самое для пересечения открытых множеств?

8. Как выглядит открытое подмножество на прямой $\mathbb{R}$?

9. Докажите, что из любой последовательности точек а) отрезка $[a, b]$, б) сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

10. Докажите, что из любого покрытия а) отрезка $[a, b]$, б) сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение. Точка $a \in M$ называется *предельной* для подмножества $A \subset M$, если любая окрестность a пересекается с A. Множество A *замкнуто*, если оно содержит все свои предельные точки.

11. Проверьте, что замкнутый шар в 10-адических числах открыт.

12. (a) Замкнуто ли пересечение любого семейства замкнутых подмножеств?
    (b) А объединение?

13. Докажите, что A замкнуто тогда и только тогда, когда дополнение к A — открыто.

14. Докажите, что кривая, заданная уравнением $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ замкнута, а функция $x^{13} + y^{22}$ достигает на ней максимума.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 16 октября 1996 года

1. Докажите, что любое открытое множество на прямой есть объединение конечного или счетного набора непересекающихся интервалов.

2. Верно ли, что любое замкнутое множество на прямой (даже ограниченное) есть объединение конечного или счетного набора непересекающихся отрезков? (Нет, пример доставляет канторово множество, обсуждаемое ниже.)

   Пусть $K_1 = [0,1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $K_2 = K_1 \setminus \Big((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\Big)$, ... K_{i+1} получается выкидыванием средней трети каждого отрезка, из которых состоит K_i. *Канторовым множеством* называется пересечение $K = \bigcap K_i$.

3. Покажите, что

   (a) K замкнуто и ограниченно;

   (b) точки K находятся во взаимно однозначном соответствии с бесконечными последовательностями, состоящими из нулей и единиц;

   (c) количество точек в K несчетно;

   (d) K не содержит ни одного отрезка ненулевой длины;

   (e) K не может быть представлено как объединение конечного или счетного набора непересекающихся отрезков.

4. Чему равна длина канторова множества? Придумайте (и назовите своим именем) пример множества канторовского типа ненулевой длины.

5. Пусть канторово множество покрыто интервалами. Всегда ли можно выбрать из этого покрытия конечное подпокрытие?

6. Докажите, что множество предельных точек любой последовательности вещественных чисел замкнуто. Более того, всякое замкнутое множество на прямой является множеством предельных точек некоторой последовательности.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 23 октября 1996 года

Множество M называется *счетным*, если существует взаимно однозначное соответствие $M \leftrightarrow \mathbb{N}$ (говорят также, что M имеет мощность $\aleph_0$).

1. Докажите, что следующие множества счетные:

   (a) множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел;

   (b) множество $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ n-ок рациональных чисел;

   (c) множество слов русского языка, т.е. конечных последовательностей

   $$a_1 a_2 \ldots , \quad a_i \in \{\text{а}, \ldots, \text{я}\} .$$

2. Докажите, что следующие множества несчетные:

   (a) множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц

   $$a_1 a_2 \ldots , \quad a_i \in \{0, 1\} ;$$

   (b) множество бесконечных последовательностей рациональных чисел;

   (c) множество слов русского языка бесконечной длины.

3. Можно ли на плоскости расположить несчетное количество попарно непересекающихся

   (a) кругов;

   (b) восьмерок (фигур вида «∞»);

   (c) букв «$\top$»;

   (d) букв «$\wedge$»?

4. Может ли функция на прямой иметь более чем счетное множество строгих локальных максимумов?

   Говорят, что *множество имеет мощность континуума*, если существует его взаимно однозначное соответствие с множеством $\mathcal{D}^\infty$ бесконечных последовательностей из нулей и единиц.

5. Докажите следующую **теорему Шредера-Бернштейна**: если существуют вложения множеств $A \hookrightarrow B$ и $B \hookrightarrow A$ то существует и взаимно однозначное соответствие $A \leftrightarrow B$.

6. Докажите, что следующие множества имеют мощность континуума:

   (a) отрезок $[0, 1]$;

   (b) множества задачи 2;

   (c) пространство $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке;

   (d) множество замкнутых подмножеств в а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{R}^2$.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 23 октября 1996 года

Определение 1. Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\ .$$

Определение 2. Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если для всякой последовательности $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ выполняется $f(x_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$.

1. Докажите, что определения 1 и 2 эквивалентны.

2. В каких точках непрерывны следующие функции:

$$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\ ; \qquad x\sin\frac{1}{x}\ ; \qquad \sin\frac{1}{x}\ ; \qquad (-1)^{[1/x]}\ ; \qquad \frac{1}{[1/x]}\ .$$

3. Функция задана и непрерывна на множестве рациональных чисел. Докажите, что она однозначно продолжается до непрерывной функции на всей прямой.

4. Опишите все непрерывные функции на прямой, удовлетворяющие тождеству

   (a) $\phi(x + y) = \phi(x)\,\phi(y)$;

   (b) $\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$.

5. Докажите, что ограниченная функция на отрезке непрерывна тогда и только тогда, когда ее график замкнут.

6. Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции не более, чем счетно.

7. Приведите пример монотонной функции с разрывами во всех рациональных точках. Исследуйте построенную функцию на непрерывность в иррациональных точках.

8. Рассмотрим следующие теоремы о множестве действительных чисел:

   - теорему о существовании точной верхней грани ограниченного множества;
   - теорему о существовании общей точки у системы вложенных отрезков;
   - теорему о существовании у ограниченной последовательности сходящейся подпоследовательности;
   - теорему о существовании у покрытия отрезка интервалами конечного подпокрытия.

   Рассмотрим следующие свойства функции f, непрерывной на отрезке $[a, b]$:

   - функция ограничена;
   - функция достигает своего максимума;

- если $f(a) < 0 < f(b)$, то $f(x) = 0$ для некоторого $x \in [a, b]$;
- функция равномерно непрерывна:

$$\forall \epsilon{>}0\ \exists \delta{>}0 : \forall x, y{\in}[a, b]\ |x - y|{<}\delta \Rightarrow |f(x) - f(y)|{<}\epsilon\ .$$

(a) (Слабая формулировка.) Докажите приведенные свойства непрерывной функции.

(b) (Сильная формулировка.) Выведите каждое из приведенных свойств непрерывной функции из каждой приведенной теоремы о действительных числах (этот пункт включает $4 \times 4 = 16$ задач).

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 30 октября 1996 года

1. При каких $x \in \mathbb{R}$ сходятся ряды
$$\sum \frac{x^k}{k}\ ; \qquad \sum \frac{x^k}{k!}\ ; \qquad \sum k!\, x^k\ ; \qquad \sum (2^k+3^k)x^k\ ?$$

2. А на множестве $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел?

Теорема. *Степенной ряд $\sum a_k(x-a)^k$ либо сходится только при $x=a$, либо при всех x, либо для некоторого R сходится при $|x-a|<R$ и расходится при $|x-a|>R$.*

Число R называется *радиусом сходимости.* Всюду ниже $a=0$.

Лемма. *Если ряд $\sum a_k z^k$ сходится, то ряд $\sum a_k x^k$ сходится для любого x, такого что $|x|<|z|$.*

Доказательство. $\sum a_k z^k$ сходится $\Rightarrow$ $a_k z^k \to 0$ $\Rightarrow$ $|a_k z^k| < C$ $\Rightarrow$ $|a_k x^k| = |a_k z^k \left|\frac{x}{z}\right|^k| < C\left|\frac{x}{z}\right|^k$, т.е. $|a_k x^k|$ мажорируется сходящейся геометрической прогрессией $\Rightarrow$ $\sum a_k x^k$ сходится.

3. Выведите теорему из леммы. Докажите, что
$$R = \sup\Big\{\ |z| : \text{последовательность } \{a_k z^k\} \text{ ограниченна}\ \Big\}\,.$$

4. Придумайте ряды, областью сходимости которых является а) $(-1,1)$; б) $[-1,1)$; в) $(-1,1]$; г) $[-1,1]$.

5. Докажите **лемму о мажорируемой сходимости**: пусть последовательность сходящихся рядов $\sum a_i^{(k)}$ сходится почленно. Тогда предельный ряд сходится и $\sum\limits_i \lim\limits_{k\to\infty} a_i^{(k)} = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_i a_i^{(k)}$ при условии, если ряды $\sum a_i^{(k)}$ мажорируются единым сходящимся рядом, $|a_i^{(k)}| < c_i$, $\sum c_i < \infty$.

6. Докажите, что сумма степенного ряда непрерывна на множестве сходимости.

7. Докажите, наконец, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

8. Докажите(-таки!) признаки сходимости Коши и Даламбера и найдите области сходимости рядов
$$\sum x^{2^n}\ ; \qquad \sum \frac{x^n}{2^n+3^n}\ ; \qquad \sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}x^n\ .$$

9. Найдите области сходимости степенных рядов, полученных из числовых рядов, встречавшихся в предыдущих задачах:
$$\sum \frac{1}{n^\alpha}x^n\ ; \qquad \sum \frac{n^2-10n+1}{n^3+17n}x^n\ ; \qquad \sum \frac{n^3}{n^5-17}x^n\ ;$$
$$\sum \frac{1}{n\ln n}x^n\ ; \qquad \sum \frac{1}{n\ln^2 n}x^n\ ; \qquad \sum \frac{1}{n\ln n\ln\ln n}x^n\ ;$$
$$1 - 1\cdot x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^6 - \cdots - \frac{1}{3}x^{11} + \cdots\ ;$$
$$\sum \mathrm{fib}_n x^n\ , \quad \text{где } \mathrm{fib}_n \text{ — числа Фибоначчи.}$$

10. Пусть ряд $\sum a_n x^n$ имеет радиус сходимости R. Найдите радиусы сходимости рядов
$$\sum a_n b^n x^n \ ; \qquad \sum a_n^3 x^n \ .$$

11. Пусть ряды $\sum a_n x^n$ и $\sum b_n x^n$ имеют радиусы сходимости R и r соответственно. Найдите радиус сходимости произведения рядов
$$\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right) \ .$$

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 6 ноября 1996 года

1. Докажите, что

   (a) если существует предел $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = q$, то ряд $\sum a_n x^n$ имеет радиус сходимости $R = q^{-1}$;

   (b) в общем случае радиус сходимости степенного ряда выражается формулой $R = q^{-1}$, где $q = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$.

2. Докажите, что отображение метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда полный прообраз любого открытого множества открыт.

   Определение. Метрическое пространство M называется *линейно связным*, если для любых двух точек $a, b \in M$ существует непрерывное отображение $f : [0,1] \to M$, такое, что $f(0) = a$, $f(1) = b$.

   Пространство M называется *связным*, если его нельзя представить как объединение двух непересекающихся непустых открытых подмножеств. Иными словами, если единственными подмножествами, являющимися одновременно открытыми и замкнутыми, являются M и $\emptyset$.

3. Докажите, что отрезок является связным и линейно связным.

4. Докажите, что линейно связное пространство связно.

5. Опишите все связные подмножества а) прямой $\mathbb{R}$; б) пространства $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел.

6. Пусть $Ж \subset \mathbb{R}^2$ есть объединение графика функции $y = \sin 1/x$ и отрезка $x = 0, -1 \leq y \leq 1$. Покажите, что $Ж$ является связным, но не линейно связным пространством.

7. Докажите, что непрерывная функция на связном пространстве принимает все промежуточные значения.

8. Докажите, что образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

9. Докажите, что непрерывная функция на компактном пространстве достигает максимума и минимума. Используйте одно из следующих определений компактности: пространство M *компактно*, если

   (a) M есть замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$;

   (b) из любой последовательность точек в M можно выбрать сходящуюся подпоследовательность;

   (c) из любого покрытия M открытыми подмножествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 13 ноября 1996 года

1. Под каким углом пересекаются гиперболы $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$?

2. Вычислите производную $(\operatorname{tg} x)'$.

3. Для дифференцирования степенных рядов нужно знать только производную степенной функции $(x^k)'$. Вычислите $(e^x)'$.

4. Постройте такую бесконечно дифференцсруемую функцию f на прямой $\mathbb{R}$, что

   (a) $f^{(k)}(0) = 0$ для всех k, но $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$;

   (b) $f(x) \equiv 0$ при $|x| \geq 1$, и $f(x) > 0$ при $|x| < 1$;

   (c) $f(x) \equiv 0$ при $x \leq -1$, и $f(x) \equiv 1$ при $x \geq 1$.

   (d) $f(x) \equiv 0$ при $|x| \geq 1$, и $f(x) \equiv 1$ при $|x| \leq 1/2$.

5. Для произвольной заданной последовательности чисел $a_0, a_1, \ldots$ постройте бесконечно дифференцируемую функцию f на прямой такую, что $f^{(k)}(0) = a_k$.

Контрольная работа

1. Пусть X связное, открытое подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$. Докажите, что X линейно связно.

2. Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ такое, что всякая непрерывная функция на M достигает максимума. Докажите, что M замкнуто и ограничено.

3. Постройте непрерывную функцию на $[0, 1]$, имеющую разрывы в точках вида $1/n$, $n \in \mathbb{N}$ и только в них.

4. Пусть функции $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны. Докажите, что функция $g(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$ также непрерывна.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 20 ноября 1996 года

1. Разложите в ряды в начале координат функции

$$e^x\ ;\quad \ln(1+x)\ ;\quad \cos x\ ;\quad \sin x\ ;\quad (1+x)^\alpha\ .$$

2. То же для функций $e^{\alpha x}\sin\beta x\ ;\quad \operatorname{arctg} x\ ;\quad \dfrac{1}{1-3x+2x^2}\ .$

3. Найдите пропущенный член разложения в бесконечности

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + ? + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\ .$$

4. Найдите неизвестные константы разложения в единице

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{(1-x)^\alpha} + \frac{B}{(1-x)^\beta} + o\left(\frac{1}{(1-x)x^\beta}\right)\ .$$

5. Найдите первые несколько членов разложения y как функции от x, заданной неявно уравнением $x^3+3xy+y^3=0$.

6. Найдите $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\operatorname{sh} x)-\operatorname{sh}(\sin x)}{x^{14}}$.

7. Найдите $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\operatorname{tg} x)-\operatorname{tg}(\sin x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x)-\operatorname{arctg}(\arcsin x)}$.