4.10.93

Дифференцируемые многообразия. Векторы и ковекторы.

Многообразие X: топологическое пространство, метризуемое. В более общем случае можно рассмотреть вместо метризуемости усиленное свойство хаусдорфовости: пусть A, B — замкнутые множества, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists U,\ V$ — открытые, $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

Лемма. *Метризуемое пространство хаусдорфово в этом смысле.*

Доказательство. Пусть $\rho(x, y)$ — метрика с обычными свойствами. Докажем лемму для случая, когда A, B — точки, т.е. обычную хаусдорфовость. Тогда $\delta = \rho(A, B) > 0$. Достаточно взять $U(A) = \{y : \rho(y, A) < \delta/3\}$. Аналогично определяется $U(B)$.

Пример не хаусдорфова одномерного многообразия: склейка отрезков по открытому интервалу, см. рис. 1.

Рис. 1.

В общих чертах многообразие — локально евклидово хаусдорфово пространство. Локальная евклидовость означает, что $\forall\ A \in X\ \exists$ открытая окрестность $U(A) \approx \mathbf{R}^n$, т.е. в этой окрестности можно ввести координаты $x^1, \ldots, x^n$.

Декартовы координаты порождают представление о 4-х мерном устройстве физического пространства. Привлекательность гипотезы о глобальной евклидовой структуре пространства объясняется огромным размером Вселенной. Рассмотрим, например, факт вращения Земли вокруг Солнца. Для его доказательства надо пронаблюдать параллакс, т.е. отклонение положения дальних звезд. Звезды оказались так далеко, что годичный параллакс пронаблюдали только во второй половине 19 века. По современным представлениям, существование вселенной оценивают 10 миллиардами лет. Объем ее ограничен. Но локально мир имеет евклидову пространственно-временную структуру.

Введем понятие дифференцируемого многообразия.

Определение. *Многообразие дифференцируемо — значит в окрестности каждой точки зафиксирован специальный класс "допустимых" координат, т.ч. если x'_i, x_i — допустимые координаты, то функции замены координат $x'_i(x_i)$ и $x_i(x'_i)$ — дифференцируемые функции (по умолчанию класса C^∞).*

Недифференцируемые многообразия открыты Дж.Милнором в конце 50-х годов.

В целом многообразие представляется в виде:

$X = \bigcup_\alpha V_\alpha$ — атлас из локальных карт, U_α — карта. В пересечении карт координаты дифференциальным образом выражаются друг через друга.

Если нужно ввести дифференциально-геометрическую величину на многообразии, это делается локально в координатах. Анализ в координатах — средство вычисления. А геометрия контролирует еще поведение объекта при замене координат.

Простейший объект — скалярная функция.

Она дифференцируема, если дифференцируема в каждой локальной карте. Нет смысла рассматривать более гладкие функции, чем само многообразие. Например, аналитические функции надо рассматривать на аналитическом многообразии.

В физической литературе числовая (скалярная) функция называется просто скаляром. Скаляры фактически не меняются при замене координат:

В формальном анализе вычисления производятся просто с функциями. В геометрии специальные агрегаты функций образуют векторы, тензоры, спиноры и т.п.

Пример. Рассмотрим кривую $f : \mathbf{R} \to X : t \in \mathbf{R}, f(t) \in X$.

Касательный вектор (вектор скорости) кривой

Касательный вектор скорости кривой — это вектор с компонентами-производными: $V^i_\alpha = \dot{x}^i_\alpha(t_\circ)$, $i = 1, \ldots, n$. Это определение отнесено к данной системе координат.

Если представлять многообразие в виде атласа, то вектор всегда приложен в точке. Возможность переносить векторы параллельно не очевидна. В евклидовой планиметрии она обосновывается постулатом о параллельных. Формально-аксиоматический анализ ситуации дали Лобачевский, Больяи, Гаусс. Риман осуществил математический и естественно-научный анализ. Возможность переносить векторы определяется геометрией пространства. В Евклидовом векторы переносятся просто, т.к. там нулевая кривизна.

Итак:

1) Вектор рассматривается в точке A.

2) Он представляет собой набор чисел $V^1_\alpha, \ldots, V^n_\alpha$ в данной локальной системе координат V_α.

3) Пусть $A \in V_\alpha \cap V_\beta$. Одна и та же кривая записывается в разных координатах. $x^i_\alpha(t) = f^i(x^i_\beta(t))$, где f — функция перехода. Тогда

$$V^i_\beta = \frac{dx^i_\beta}{dt} = \frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha} \cdot \frac{dx^j_\alpha}{dt} = \left(\frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha}\right)_A V^j_\alpha(t),\ t = t_0$$

.

Итак, вектор — такой объект на многообразии, который отнесен к данной точке A, задается в данной локальной системе координат, при замене координат преобразуется посредством матрицы Якоби. Совокупность всех векторов в данной точке образует n-мерное векторное пространство $\mathbf{R}^r = T_A X$ — касательное пространство в точке A.

Напомним индексное соглашение линейной алгебры:$V^j_\alpha = J^i_{(\alpha,\beta)j} V^j_\beta$ — эта запись означает суммирование по j. Знак суммы опускается.

Это удобно: $V = (V^i_\alpha)$, $V = (V^j_\beta)$, $V^i_\alpha = J^i_j V^j_\beta$, $J^i_j = \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}$. Идет суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам.

Все вышесказанное можно считать определением касательного вектора в точке.

Замечание. В 20-30 гг. были популярны недлинные аксиоматические определения.

Следующий объект — ковектор. Если вектор — калька с вектора скорости кривой, то ковектор — калька с градиента.

Определение. *1) Ковектором в точке A называется*

2) Набор чисел $(V_{\alpha 1}, \ldots, V_{\alpha n})$ в данной системе координат $(x_\alpha^1 \cdots x_\alpha^n)$

3) Преобразуется по правилу: $V_{j\beta} = V_{i\alpha}\left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right)|_A$.

Чтобы понять это правило, рассмотрим градиент некоторой функции f: $V_{\alpha i} = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i}$. Тогда

$$V_{\beta j} = \frac{\partial f}{\partial x_\beta^j} = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i} \cdot \left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right)$$

.

Сравним эти законы преобразования:

Векторы: $V_\alpha^i = V_\beta^j\left(\frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}\right)|_A$, матрица J_j^i.

Ковекторы: $V_{\beta j} = V_{\alpha i}\left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right)|_A$ — тогда это ${J^{-1}}^i_j$, т.е. в преобразовании участвуют взаимно-обратные матрицы, поскольку $\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} \cdot \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^k} = \delta_k^i$ — это просто формула дифференцирования сложной функции.

В линейной алгебре все то же, только матрицы постоянные.

Переходя к единообразной записи, имеем для векторов: $V_\beta^j = V_\alpha^i \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i}$. В этой записи одна матрица относится к другой как обратная к транспонированной.

До Римана все преобразования происходили в ортогональных координатах, поэтому векторы и ковекторы не различали (обратная матрица совпадает с транспонированной). А угловая скорость и магнитное поле — не вектор и не ковектор (в физике — аксиальные векторы, в отличии от полярных; не различались при ортогональных преобразованиях с определителем $+1$). Все остальные сложные объекты проистекают из векторов и ковекторов. Вектор не дифференцируется без привлечения геометрии пространства.

Замечание. Все ковекторы в точке образуют линейное пространство $\mathbf{R}^n$, т.ч. базис $e^i = (o, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Тогда ковектор $V_i e^i$; вектор $V^i e_i$.

Рассмотрим вектор $(V_\alpha^1 \ldots V_\alpha^n) \mid_A$; ковектор $(V_{\alpha 1}, \ldots, V_{\alpha n}) \mid_A$.

Лемма. *Рассмотрим $V_\alpha^i V_{\alpha i}$. Тогда это выражение не зависит от системы координат, т.е. пространства векторов и ковекторов двойственны.*

Доказательство. Надо доказать, что $V_\alpha^i V_{\alpha i} = V_\beta^j V_{\beta j}$. Подставим: $V_{\beta j} = V_{\alpha i} \left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} \right) \mid_A$; $V_\beta^j = V_\alpha^i \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i} \mid_A$.

$$V_\alpha^i \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i} V_{\alpha k} \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^j} = V_\alpha^i V_{\alpha k} \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i} \cdot \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^j} = V_\alpha^i V_{\alpha k} \delta_k^i = V_\alpha^i V_{\alpha i}, \text{ ч.т.д.}$$

Напомним, что дифференциал функции $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}(dx^i)$ естественным образом является ковектором.