11.10.93.

Риманова метрика на многообразии. Тензоры.

Риманова (псевдориманова) метрика.

Введем риманову (псевдориманову) метрику на многообразии X размерности n: $X = \bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha$; V_α имеет координаты $(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$. Современный подход к изучению метрических свойств пространства — при помощи скалярного произведения.

Скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$ — это билинейная форма: для $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n : <\xi, \eta> \in \mathbf{R}$, причем

$$<\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2, \eta> = \alpha_1 <\xi_1, \eta> + \alpha_2 <\xi_2, \eta>$$

$$<\xi, \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2> = \alpha_1 <\xi_1, \eta_1> + \alpha_2 <\xi_2, \eta_2>$$

Добавляется также условие симметричности $<\xi, \eta> = <\eta, \xi>$ и положительной определенности: $<\eta, \eta> > 0$ при $\eta \neq 0$.

Иногда используются отрицательные скалярные произведения, кососимметричные, комплексные (теория относительности, квантовая и классическая механика). В теории относительности рассматриваются отрицательные скалярные квадраты векторов.

Если задано скалярное произведение, легко определить длину вектора и угол между векторами:

$$|\eta| = \sqrt{<\eta, \eta>}, \ \cos\varphi = \frac{<\xi, \eta>}{|\xi||\eta|}.$$

Если точки отождествить с векторами, то расстояние между точками — длина соответствующего вектора. Заметим, что метрические понятия по существу 1- и 2-мерны.

Определение. *Римановой (псевдоримановой) метрикой многообразия называется скалярное произведение, заданное в касательном пространстве в каждой точке и непрерывно зависящее от точки, рис.1.*

Рис.1.

Для удобства можно представлять себе все многообразие вложенным в пространство достаточно большой размерности. Но не надо соблазняться измерять, например, углы между векторами в разных точках поверхности. Ведь вложение в объемлющее пространство можно изменить, не изменяя внутренней геометрии поверхности.

Определение. *В локальной системе координат (псевдо)риманова метрика задается системой функций $g^{\alpha}_{ij}(x^1_\alpha \dots x^n_\alpha)$, т.ч.*

$$< v_\alpha, w_\alpha >= g^{(\alpha)}_{ij}(x^1_\alpha \dots x^n_\alpha) v^i_\alpha w^j_\alpha = g^{(\beta)}_{kl}(x_\beta) v^k_\beta w^l_\beta,$$

т.е. результат не зависит от системы координат; при этом функции $g(x)$ непрерывны.

Получаем разные матрицы $\|g^{(\alpha)}_{uh}\|$ и $\|g^{(\beta)}_{kl}\|$ в разных системах координат. Из условия независимости выводится правило преобразования компонент g при замене систем координат.

Векторы преобразуются по правилу: для функций замены координат $x_\alpha(x_\beta)$. имеем $v^k_\beta = \frac{\partial x^k_\beta}{\partial x^i_\alpha} v^i_\alpha$ (суммирование по i).

Лемма. *Пусть $g^{\alpha}_{ij}(x_\alpha) \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^k_j} \frac{\partial x^j_\alpha}{\partial x^l_\beta} = g^{\beta}_{kl}(x_\beta)$, где $x_\alpha = x_\alpha(x_\beta)$, тогда скалярное произведение $< v_\alpha, w_\alpha >$ корректно определено, т.е. не зависит от системы координат.*

Доказательство. $g^{\alpha}_{ij} v^i_\alpha w^j_\alpha = g^{\beta}_{kl} v^k_\beta w^k_\beta = g^{\alpha}_{ij} \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^k_\beta} \frac{\partial x^j_\alpha}{\partial x^l_\beta} v^i_\alpha \frac{\partial x^k_\beta}{\partial x^i_\alpha} w^j_\alpha \frac{\partial x^l_\beta}{\partial x^j_\alpha} = g^{\alpha}_{ij} v^i_\alpha w^j_\alpha$

То же самое происходит при замене матриц квадратичных форм в линейной алгебре, только в этом случае матрицы перехода постоянны, $\widetilde{G} = J^* G J$, где J — матрица перехода (если верхний индекс — строка, нижний — столбец). В общем случае тензоры имеют много верхних и нижних индексов. Опять-таки при ортогональных заменах $J^* = J^{-1}$, и матрицы квадратичных форм не отличаются от линейных операторов (можно доказать, что если замена ортогональна в $\forall$ точке, то она глобально линейна). Итак,

Определение. *Римановой метрикой называется зависящая от точки матрица $g_{ij}(x)$, преобразуемая по указанному закону.*

Замечание. Та же метрика определит и произведение ковекторов $g^{ij} v_i w_j$, если метрика не вырождена; здесь $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$.

С заданием римановой метрики вся локальная геометрия будет задана: длины, углы, площади, объемы и т.п.

Определение. *Пусть задана кусочно гладкая кривая, гладкость означает, что в локальной системе координат она задается дифференцируемыми (по крайней мере, C^1) функциями. Длиной кривой называется число* $l(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mid \dot{x}(t) \mid dt$, *где* $\dot{x}(t) = v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, *т.е. в координатах* $v_\alpha^i = \dot{x}_\alpha^i(t)$. *Здесь* $\mid v(t) \mid = \sqrt{< v(t), v(t) >}$.

Длина положительна в случае положительно определенного скалярного произведения. Но в 4-мерном пространственно-временном континууме бывают нулевые и отрицательные длины. Например, лучи света, распространяются по кривым нулевой длины.

Длина кривой не зависит от выбора параметра:

$$\text{пусть } t = t(\tau),\ \frac{dt}{d\tau} > 0. \text{ Тогда } \mid \frac{dx}{d\tau} \mid d\tau = \mid \frac{dx}{dt} \mid dt, \text{ где } \mid \eta \mid = \sqrt{< \eta, \eta >},$$

т.е. длина имеет геометрический смысл, а не зависит от параметризации. Если замена не монотонна, результат не сохранится из-за многократного пробегания кривой. Длина аддитивна. Обычно рассматривается риманово скалярное произведение, которое симметрично:
$g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ и положительно: $< \eta, \eta >= g_{ij}(x)\eta^i\eta^j > 0,\ \eta \neq 0$.

Псевдориманово скалярное произведение невырождено, но не обязательно положительно. При произвольной замене даже в евклидовом пространстве непросто распознать евклидовость геометрии. Хорошо бы иметь внутренние характеристики. При $n = 2$ имеем три независимых матричных элемента метрики, а замена определяется двумя функциями, остается один свободный функциональный параметр, определяющий кривизну пространства, т.е. уже при $n = 2$ возможно разнообразие геометрий.

При росте размерности кривизна становится сложным тензорным объектом; в математике за два последних столетия произошла глубокая эволюция от наивных понятий кривизны Эйлера-Гаусса, как кривизны вложенных в пространство поверхностей.

В $\mathbf{R}^n$ расстояние между векторами $\rho(\eta_1, \eta_2) = \mid \eta_1 - \eta_2 \mid$. Т.е. нужно понятие нормы вектора. В банаховых пространствах рассматривают выпуклое (не обязательно симметричное) тело β, содержащее 0. Посредством его задается длина каждого вектора: $\mid \eta \mid_\beta = \rho(0,$ *граница тела*$)$ для векторов с евклидовой длиной 1, где β — расстояние в обычном смысле. Но тогда можно так сделать в каждом касательном пространстве и снова измерить длины кривых: получим финслерову геометрию. Обычно банаховы пространства реализуются как пространства функций.

Наконец, можно подойти и к понятию расстояния между точками многообразия. Естественно его считать как минимум длин кривых, соединяющих точки. Кривая, на которой этот минимум достигается, называется геодезической. Существование локальной геодезической на двумерной поверхности — глубокий результат Гильберта конца 19 века.

Тензоры.

Мы уже знаем скаляры, (числовые функции или скалярные поля), векторы, ковекторы, скалярные произведения.

Определение. *Тензорным полем типа* (p,q) *называется набор функций* $T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}(x_\alpha)$, $i_k, j_l = 1,\ldots,n$.

В итоге имеем n^{p+q} независимых функций, причем при замене координат $x_\alpha(x_\beta)$ они преобразуются по закону:

$$T^k_l(x_\beta) = \frac{\partial x^k_\beta}{\partial x^i_\alpha} T^i_j(x_\alpha) \frac{\partial x^j_\alpha}{\partial x^l_\beta} \ - \ \text{в краткой записи, или}$$

$$T^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots\ l_q}(x_\beta) = \frac{\partial x^{k_1}_\beta \cdots \partial x^{kp}_\beta}{\partial x^{i_1}_\alpha \cdots \partial x^{i_p}_\alpha} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x_\alpha) \frac{\partial x^{j_1}_\alpha \cdots \partial x^{jq}_\alpha}{\partial x^{l_1}_\beta \cdots \partial x^{l_q}_\beta}.$$

Число $p+q$ называется рангом тензора; пара (p,q) — тип тензора.

Выпишем все возможные случаи для $n = 2$ (для (1,0) — векторов; (0,1) — ковекторов уже было). Для ранга 2: ((0,2) — уже было) (1,1) — линейный оператор (аффинный).

$T^i_j(x_\alpha)\frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^i_\alpha}\frac{\partial x^j_\alpha}{\partial x^l_\beta} = T^k_l(x_\beta)$, аналог в линейной алгебре $T' = J^{-1}TJ$.

Упражнение: Покажите, что матрица, обратная к матрице (0,2) приобретает тип (2,0).

Собственные числа матрицы скалярного произведения не имеют геометрического смысла, приобретают его лишь при наличии римановой метрики, но имеют инвариантный смысл если тензор (1,1).

Т.о. линейная алгебра — теория тензоров низких рангов в линейном пространстве.