25.10.93.

# Дифференциальное исчисление тензоров. а) Инвариантное дифференциальное исчисление тензоров. б) Дифференциальное исчисление тензоров в римановой метрике.

Рассмотрим тензор $T^I_J(x)$ на $n$-мерном многообразии с локальной координатой, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $I = (i_1, \dots, i_p)$, $J = (j_1, \dots, j_q)$. Тип тензора $(p, q)$, ранг $p + q$. Напомним, что тензоры образуют в каждой точке $n^{p+q}$-мерное линейное пространство. Была определена операция произведения тензоров: $(p, q) \times (p', q') = (p + p', q + q')$, а также операции перестановки верхних или нижних индексов и взятия следа.

$$T^I_J(x) \mapsto T^{\sigma_1(I)}_{\sigma_2(J)};\ T^I_J(x) \mapsto T^{I'iI''}_{J'iJ''},\ \text{где}\ \begin{matrix} I = I'iI'' \\ J = J'jJ'', \end{matrix}$$

а затем положено $i = j$ и произведено суммирование. В результате $(p, q) \mapsto (p - 1, q - 1)$.

Все это были инвариантные алгебраические операции, не зависящие от системы координат, в которой они проделываются.

Рассматриваются также специальный класс тензоров только с нижними индексами $T(x) = \{T_{i_1 \dots i_p}(x)\}$, т.е. типа $(0, p)$. Они представляют собой полилинейные функции от набора векторов $v_1 \cdots v_p$, а именно, положим: $T\langle v_{(1)}, \dots, v_{(p)}\rangle = T_{i_1 \cdots i_p}(x) v^{i_1}_{(1)} \cdots v^{i_p}_{(p)}$. Очевидно, есть линейность по каждому аргументу, т.е.

$$T\langle \cdots, \lambda a + \mu b, \cdots\rangle = \lambda T\langle \cdots, a, \cdots\rangle + \mu T\langle \cdots, b, \cdots\rangle$$

.

Полилинейные функции, как и всякие, можно ограничивать на подпространство, например на касательное подпространство к подмногообразию. Непонятно, как ограничить вектор на касательное подпространство, если он там не лежит. Это можно сделать, если есть риманова метрика, тогда появится и проектирование.

Пример: Рассмотрим (0,1) тензор $f_i dx^i$. Пусть $x^i(t)$ — кривая. Ограничить тензор $f_i(x)dx^i$ — это просто подставить: $f_i(x(t))\left(\frac{dx^i}{dt}\right)dt = (f_i \dot{x}^i)dt$. Так ограничивается ковекторное поле. Это выражение можно проинтегрировать вдоль кривой, метрика совершенно не требуется.

Мы имеем числовую функцию на кривой, можно ее интегрировать (если кривая гладкая, т.е. имеет непрерывный касательный вектор).

Это свойство лежит в основе теории интегрирования дифференциальных форм. Выделены два важных класса тензоров — симметрические и кососимметрические. Симметрические тензоры — просто коэффициенты однородных многочленов степени $p$. Тензор кососимметрический, если $\forall x\ \forall \sigma\ T_{\sigma(T)}(x) = (-1)^{\sigma} T_I(x)$.

Сравнивая формулу замены переменных в кратном интеграле и закон преобразования кососимметрических тензоров, можно понять, что интегрируются на самом деле кососимметрические тензоры. Нельзя интегрировать числовые функции.

Напоминаем лемму о кососимметрических тензорах:

**Лемма.** *1)* $T_{i_1 \cdots i_p} = 0$, *если* $p > n$.

*2)* $p = n$, $T_{i_1 \cdots i_n}(x) = (-1)^{\sigma} T_{12\cdots n}(x)$.

*3)* $x = x(y)$, *тогда*
$\widetilde{T}_{12\cdots n}(x(y)) = J(x(y)) T_{12\cdots n}(x(y))$, *где* $J(x(y)) = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$.

Напомним доказательство пункта 3):

$$\widetilde{T}_{12\cdots n}(x(y)) = T_{i_1,\cdots,i_n}(x(y)) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y'} \cdots \frac{\partial x_{i_n}}{\partial y^n} =$$
$$= T_{12\cdots n}(x(y)) \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y'} \cdots \frac{\partial x_{i_n}}{\partial y^n} = T_{12\cdots n}(x(y)) \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right).$$

Полученный детерминант есть единственный кососимметрический тензор ранга $n$.

Наш общий вопрос: как проинтегрировать кососимметрический тензор ранга $k$ по $k$-мерному многообразию. Очень просто: ограничим его, получим $k$-мерный тензор на $k$-мерном подмногообразии, он с точностью до числового множителя детерминант, остается проинтегрировать числовую функцию. Вариационное исчисление ограничивает бесконечномерные формы на конечномерные пространства и интегрирует. Какое отличие полного тензора от скаляра: при замене координат значение меняется, умножается на якобиан преобразования. Говорят так: выделяем элемент объема, после этого любая функция превращается в форму домножением на этот элемент и интегрируется. На самом деле не всегда интегрируются только дифференциальные формы.

Пример для $n = 1$. Бывают интегралы $f(t)dt$ и $f(t) \mid dt \mid$. Различие чувствуется, только когда замена имеет отрицательную производную.

Что можно проинтегрировать по любой кривой?

1) Дифференциальную форму (II рода ).

2) Функцию по длине кривой. (I рода).

Общий взгляд. 1) В каждой точке $x$ надо задать функцию касательного вектора $\sigma(V)$, т.ч. $\sigma(\lambda V) = \lambda\sigma(V)$ для $\lambda > 0$. Тогда можно брать интеграл $\int \sigma(\dot{x}(t))dt$. Из-за свойства "линейности" интеграл останется инвариантным при замене параметра.

Итак, по кривой можно интегрировать то, что при ограничении получит вид $f(t)dt$ и так далее.

Интегралы от дифференциальных форм имеют важные свойства, позволяющие ввести их в формулировки законов природы. А именно: это связь интегралов по многообразию и границе (формулы типа Стокса), а также топологическая инвариантность интегралов.

Пример.

$$\int d\varphi = 2\pi, \text{ где } d\pi = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

и интегрирование осуществляется по замкнутой кривой, охватывающей 0. Т.е. при деформации одной кривой в другую значение не меняется. Нельзя только протаскивать кривую через 0. Т.е. наш интеграл — не аналитическая, а топологическая величина. Это часто встречается в ТФКП — там интегралы оказываются топологическими. Например, наш интеграл фактически задает определение числа оборотов вокруг 0. Эти важные свойства есть у интегралов только от кососимметрических тензоров.

Дифференциальная форма — кососимметрический тензор с нижними индексами на многообразии. Их можно изучать отдельно от общей теории тензоров. Разработана дифференциальная символика записи. Например, $f = (f_i(x)) \sim f_i(x)dx^i$.

Итак, рассмотрим кососимметрический тензор $T_{i_1\cdots i_p}(x)$. Мы рассматривали его в базисе $e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}$. Перейдем к другому базису: $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = (\sum\limits_{\sigma}(-1)^{\sigma} e^{i_1 \otimes \cdots \otimes i_p})/p!$.

Примеры: $p = 1$, эти базисы совпадают: $dx^i$.

$p = 2: \quad dx^i \wedge dx^j = 1/2(dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i)$.

Заметим, что замена не целочисленная, что имеет определенные последствия.

Если старый базис был удобен для операции обычного произведения тензоров, то в новом удобно задать кососимметричное внешнее произведение.

Итак, дифференциальная форма имеет вид

$$\Omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \Omega_{i_1\cdots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}, \ p = 0, 1, \ldots, n.$$

Это локальная запись. Если $x = x(y)$, то $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$.

Зададим внешнее произведение по правилам:

1) $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$.

2) Ассоциативность операции внешнего умножения $\wedge$.

3) Билинейность: $(\alpha dx^i + \beta dx^j) \wedge dx^k = \alpha dx^i \wedge dx^k + \beta dx^j \wedge dx^k$.

Таким образом, в каждой точке $x$ имеется алгебра. Произведение любых двух форм можно найти с учетом этих правил.

**Замечание.** С одной стороны, эту операцию можно определить через классические операции над тензорами, с другой стороны, можно излагать теорию дифференциальных форм независимо от тензоров.

Над дифференциальными формами имеется единственная инвариантная дифференциальная операция — внешнее дифференцирование .

Пример $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Рассмотрим ковекторное поле $(f_i)$.

$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right) = T_{ij}$ — не тензор (тензор лишь для аффинных замен). Тензором будет $\frac{\partial f_i}{\partial x^j} - \frac{\partial f_j}{\partial x^i} = T_{ij} - T_{ji}$.

Здесь сложность в дифференцировании принципиальная.
$f(x + \Delta x) - f(x)$ — имеет смысл. А разность векторов или ковекторов в разных точках не имеет корректного смысла без римановой структуры. Так что нам остается единственная дифференциальная операция, сохраняющая тензоры (ротор — это ее частный случай). Иногда через них записываются законы природа (часть законов Фарадея-Максвелла). Пример ковекторного поля — вектор электрической напряженности. По гипотезе Эйнштейна гравитация — риманова метрика 4-мерного мира. Но некоторые законы абсолютно инвариантны. Магнитное поле — дифференциальная форма с двумя индексами. Соответственно интегрируются: электрическое поле по кривой, магнитное по площадке.

**Определение.** *Дифференцирование (внешнее) дифференциальных форм:*

*1)* $df$ *— дифференциал скалярной функции* $\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

*2)* $d(dx^i) = 0$.

*3)* $d(\Omega_{1(p)} \wedge \Omega_{2(q)}) = d\Omega_1 \wedge \Omega_2 + (-1)^p \Omega_1 \wedge d\Omega_2$

Пример.

$$\begin{aligned} d(f_i(x)dx^i) &= df_i \wedge dx^i = \\ = \frac{\partial f_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i &= \sum_{i<k} (\frac{\partial f_i}{\partial x^k} - \frac{\partial f^k}{\partial x^i})(dx^i \wedge dx^k). \end{aligned}$$