01.11.93.

Дифференциальные формы — кососимметричные тензоры только с нижними индексами. $T_{i_i \dots i_p}(x) = \sum\limits_{i_1 < \dots < i_p} \Omega(x) dx^{i_1} \bigwedge \dots \bigwedge dx^{i_p}$, здесь $(p!) T_{i_i \dots i_p} = \Omega_{i_i \dots i_p}$.

Совокупность всех дифференциальных форм — ассоциативная алгебра, т.е. формы можно складывать и перемножать внешним образом, операция умножения билинейна.

Заметим, что можно рассматривать формальные суммы дифференциальных форм разных рангов, например: $a + 3dx^1 + 2dx^2 \bigwedge dx^4$.

Обозначим $\Omega^*(X)$ — алгебра бесконечно дифференцируемых дифференциальных форм. В каждой точке имеем:

$\bigwedge^* \mathbf{R}^n_x$ — полная внешняя степень касательного пространства.

$\bigwedge^p \mathbf{R}^n_x$ — внешняя степень ранга p.

$\bigwedge^* = \sum\limits_{i=0}^{n} \bigwedge^p \mathbf{R}^n_x,\ \dim \bigwedge^p = C^p_n = \binom{p}{n}$.

Укажем некоторые свойства этой алгебры:

1) $1 \ \in \ \Omega^*$.

2) В локальных координатах имеются базисные элементы dx^i, функциональные коэффициенты $f(x)$.

3) Правила умножения: $dx^i \bigwedge dx^j = -dx^j \bigwedge dx^i$;
$f dx = dx\ f$.

Ввиду таких простых правил часто в анализе теорию дифференциальных форм излагают независимо.

Имеется единственный инвариантный дифференциальный оператор d, определенный на формах.

Замечание. Все годится для форм с комплексными значениями.

Вообще, можно строить теорию со значениями в том поле, которое содержит значения координат.

Итак,

Определение. $d:\ \Omega^i(X) \to \Omega^{i-1}(X)$ — *линейный оператор, т.ч.*

1) $d(f(x)) = df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

2) $d(dx^{i_1} \bigwedge \dots \bigwedge dx^{i_p}) = 0$.

3) $d(f\Omega) = df \bigwedge \Omega + f d\Omega$, *где* $f \in C^\infty(X)$.

Чтобы непротиворечивость системы аксиом 1)-3) была очевидной, можно считать, что в случае 3) $\Omega = dx^{i_1} \bigwedge \ldots \bigwedge dx^{i_p}$, тогда свойство имеет вид: $d(f\Omega) = df \bigwedge \Omega$.

Лемма. *Оператор d со свойствами 1)-3) существует и единствен.*

Доказательство. $\Omega = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_p} \Omega_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \bigwedge \ldots \bigwedge dx^{i_p}$.

Тогда по линейности $d\Omega = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_p} d\Omega_{i_1\ldots i_p} \bigwedge dx^{i_1} \bigwedge \ldots \bigwedge dx^{i_p}$.

Очевидно, это снова дифференциальная форма ввиду правил внешнего умножения. Т.о. есть единственность, а явный вид формулы дает существование.

Заметим, что использована ассоциативность умножения: $dx^i \bigwedge dx^{i_1} \bigwedge \ldots \bigwedge dx^{i_p}$. Здесь $i_1 < \ldots < i_p$, но i может не удовлетворять этому условию. Тогда придется его несколько раз переставить, не обращая внимания на расстановку скобок. Это и есть ассоциативность.

Теорема. *1) $\Omega_1 \bigwedge \Omega_2 = (-1)^{pq} \Omega_2 \bigwedge \Omega_1$, где p — ранг Ω_1, q — ранг Ω_2.*

2) $d(\Omega_1 \bigwedge \Omega_2) = (d\Omega_1) \bigwedge \Omega_2 + (-1)^p \Omega_1 \bigwedge d\Omega_2$.

Доказательство. 1) $e_1 \cdots e_p e_{p+1} \cdots, e_{p+q}$ — пусть порождают линейное пространство. Рассмотрим базис $e_{p+1} \cdots e_{p+q} e_1 \cdots e_p$. Тогда ориентация перехода от одного базиса к другому есть $(-1)^{pq}$. Это очевидно из рассмотрения транспозиций.

Это же рассуждение применяется к

$$dx^{i_1} \bigwedge \cdots \bigwedge dx^{i_p} \bigwedge dx^{j_1} \bigwedge \cdots \bigwedge dx^{i_q}.$$

Подобное рассуждение часто встречается при взятии прямой суммы ориентированных пространств в том и другом порядке.

2) Очевидно, утверждение справедливо для форм вида

$$(dx^{i_1} \bigwedge \cdots \bigwedge dx^{i_p}) = \Omega_1, \ (dx^{j_1} \bigwedge \cdots \bigwedge dx^{j_q}) = \Omega_2.$$

Так что все дело в умножении на числовую функцию. Именно она подвергается нетривиальному дифференцированию.

Пусть верно для Ω_1 и Ω_2; докажем для $f\Omega_1$ и $g\Omega_2$, где f, g — функции. Тогда все будет доказано.

Упражнение. Проделайте это доказательство.

Ясно, откуда берется $(-1)^p$: придется p раз переставить дифференциал.

Примеры: Рассмотрим в пространстве электрическое и магнитное поля. На частицу заряда e действует сила в классическом обозначении $f = e\overrightarrow{E} + e[\overrightarrow{H} \times \frac{\overrightarrow{V}}{C}]$. $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{H}$ — электрическое и магнитное поля. На самом деле, сила — ковектор, значит, E — ковектор, а H — кососимметрический тензор ранга 2.

$$f_i(x) = eE_i + eH_{ij}\frac{Vj}{C},\ H_{ij}(x) = -H_{ji}(x).$$

Векторное произведение указывает на наличие кососимметричного тензора, если результат — ковектор. В евклидовой метрике разработано сопоставление:

$$H_{12} \to H^3,\ H_{23} \to H^1,\ H_{13} \to H^2.$$

При ортогональном преобразовании с определителем +1 законы преобразования не отличаются. Отличие чувствуется, если сделать преобразование с определителем -1. Поэтому физики назвали вектор магнитного поля "аксиальным". Еще пример тензора второго ранга: угловая скорость.

Законы Фарадея-Максвела:

$$H = \sum_{i<j} dx^i \bigwedge dx^j,\ x = (x^1, x^2, x^3),\ E = E_i(x)dx^i.$$

1) $dH = 0$.

2) $dE = -\frac{1}{C}\frac{\partial H}{\partial t}(H_{ij} = H_{ij}(x,t))$.

Эти законы не зависят от метрики.

Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^{3,1}$ с координатами (x^0, x^1, x^2, x^3), $x^0 = ct$. (Это делается для согласования размерностей.)

Минковский дал геометрическую трактовку СТО.

В природе до изучения микромира встречаются только электромагнитные и гравитационные силы, они имеют геометрическую структуру.

Положим $F(x) = E_i dx^i \bigwedge dx^0 + \sum\limits_{i<j} H_{ij} dx^i \bigwedge dx^j$; $i, j = 1, 2, 3$.

Упражнение: Законы 1) и 2) равносильны свойству $dF = 0$ (замечание Лоренца).

Электромагнитное поле замкнуто. Этот простейший закон природы требует лишь простейших геометрических структур. Т.е. электромагнитное поле — самая грубая физическая структура.

Теорема. $d \cdot d = 0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $d(df) = 0$, где f — функция. Имеем: $\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, $d(\varphi_i(x)dx^i) = \sum\limits_{i<j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i}\right)(dx^i \bigwedge dx^j)$. Подставив $\varphi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, получим 0 из-за симметрии частных производных.

Дифференциальные формы изобрел Пуанкаре, решая задачи об автоморфных функциях и гамильтоновых системах небесной механики. Геометрическая формализация создана А.Картаном и де Рамом.

Мы видим, что много есть замкнутых форм, например это любая точная форма, вида dA. В односвязной области евклидова пространства замкнутые и точные формы совпадают. Насколько замкнутых больше, чем точных — определяется топологией области.

Пример. $d\varphi = \frac{xdy - ydx}{r^2}$, здесь d — просто обозначение, а не дифференциал, т.к. φ — не функция (это многозначная функция) на $\mathbf{R}^2 \backslash 0$. Надо выкинуть кривую, содержащую 0 и уходящую в бесконечность, чтобы φ стало однозначной функцией (упражнение).

Теперь переходим к метрике. Пусть на многообразии в локальных координатах $x = (x^1, \ldots, x^n)$ задана метрика

$$g_{ij}(x) = g_{ji},\ g(x) = \det g_{ij}(x) \neq 0.$$

Определение. *Замена координат сохраняет ориентацию, если якобиан положительный.*

Определение. *Многообразие называется ориентированным, если в атласе все замены сохраняют ориентацию.*

Примеры неориентируемых многообразий — лист Мебиуса и проективная плоскость.

Будем считать, что многообразие X ориентируемо.

Упражнение: любое одномерное многообразие ориентируемо.

Лемма. *Пусть X — ориентированное многообразие с метрикой. Тогда $g'(x(y)) = J^2 g(x(y))$, где $J = \frac{\partial x}{\partial y}$.*

Доказательство. Это очевидно из закона преобразования матриц квадратичных форм $G' = J^* G\ J$.

А тогда $\Omega = \sqrt{g(x)} dx^1 \bigwedge \cdots \bigwedge dx^n$ — дифференциальная форма. Она называется элементом объема на ориентированном многообразии.

Пример. Метрика в 4-мерном пространстве. $(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2$. Векторы классифицируются на пространственноподобные (скалярный квадрат <0), временеподобные (скалярный квадрат >0), световые ($=0$).

Материальная точка живет по кривой, у которой касательные вектора только временеподобны. Тогда у таких кривых есть длина. Каков ее смысл? Это время жизни.

Упражнение. Сравнить времена жизни вдоль разных траекторий.

Присутствие метрики позволяет из формы ранга k получить инвариантно форму ранга $n-k$.

Риманову геометрию можно рассматривать как язык описания пространственно-временной реальности. Одно из первых применений этого языка внутри математики — топология.