22.11.93. лекция 9

Дифференциальное исчисление на гладких многообразиях

Нетрудно дифференцировать функцию: $\nabla_k f = (\frac{\partial f}{\partial x^k})$ — ковектор. Но в случае произвольного тензора $\nabla_k T^{(i)}_{(j)} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}$ — не тензор. Хотелось бы при дифференцировании от тензора типа (p, q) перейти к тензору типа $(p, q+1)$.

Идея — подобрать добавку $D^{(i)}_{(j)}$, чтобы в результате получился тензор. Эта добавка, очевидно, не единственна; как найти ее естественным образом?

Рассмотрим простейший случай векторов. $\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{pk} T^p$. Γ^i_{pk} — символы Кристоффеля — преобразуются не по тензорному, а по другому закону: $z \to z'$, тогда $\Gamma^{k'}_{p'q'} = \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}(\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}})$.

Заметим, что символы Кристоффеля не единственны, можно добавить тензор той же валентности. Набор символов Кристоффеля на всем многообразии называется аффинной связностью, ковариантным дифференцированием или параллельным переносом. Операция ∇_k — взятие ковариантной производной. Построение ковариантной производной тензоров высоких порядков должно удовлетворять следующим естественным свойствам: коммутирование со сверткой, на произведении действует формула Лейбница, производная функции равна градиенту.

Теорема. *Аффинная связность единственным образом задает такое ковариантное дифференцирование тензоров ∇_k, что:*

1) ∇_k *— линейный оператор;*

2) $\nabla_k f = (\frac{\partial f}{\partial x^k})$.

3) $\frac{\partial}{\partial x^k}(T^i T_i) = (\nabla_k T^i)T_i + T^i(\nabla_k T_i)$.

4) $\nabla_k(R^{(i)}_{(p)}S^{(j)}_{(q)}) = (\nabla_k(R^{(i)}_{(p)})S^{(j)}_{(q)} + R^{(i)}_{(p)}(\nabla_k S^{(j)}_{(q)})$.

При этом ковариантная производная равна:

5)

$$\begin{aligned}\nabla_k T^{(i)}_{(j)} &= \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k} - T^{(i)}_{jj_2\cdots j_q}\Gamma^{j}_{j_1 k} - \cdots - T^{(i)}_{j_1\cdots j_{q-1}j}\Gamma^{j}_{j_q k} + \\ &\quad + T^{i,i_2\cdots i_s}_{(j)}\Gamma^{i_1}_{ik} + \cdots + T^{i_1\cdots i_{p-1},i}_{(j)}\Gamma^{i_p}_{ik}.\end{aligned}$$

Доказательство. Из свойства 3) можно вывести вид ковариантной производной для ковекторов.

Для произвольного тензора $T = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \cdots e^{j_q}$.

Воспользовавшись свойствами 1)-4), получим 5). Тем самым доказали и существование, и единственность.

Имея ковариантную производную, можно дифференцировать тензор по направлению вектора: $\nabla_\xi T = \xi^k \nabla_k T$.

Посмотрим, как переносится вектор по кривой в обычной евклидовой плоскости:

$$\frac{dT^i}{dt} = 0; \frac{dx^k}{dt} \cdot \frac{\partial T^i}{\partial x^k} = 0.$$

Последнюю формулу можно перенести на многообразие как определение, если заменить производную на ковариантную.

Определение. *Поле векторов на кривой параллельно, если*

$$\frac{\partial x^k}{\partial t}\nabla_k T^i = 0.$$

Пусть кривая рассматривается при $0 \leq t \leq 1$. $T^i(0)$ — начальный, $T^i(1)$ — конечный векторы.

Определение. *$T^i(1)$ параллелен $T^i(0)$ вдоль $x(t)$, если есть поле параллельных вдоль кривой векторов с началом $T^i(0)$, концом $T^i(1)$. Или: $T^i(1)$ — результат параллельного переноса $T^i(0)$ вдоль $x(t)$.*

Всегда ли можно определить результат параллельного переноса? Для этого надо решить дифференциальное уравнение $\frac{dT^i}{dt} + (\frac{dx^k}{dt}\Gamma^i_{jk})T^j = 0$. Решение этого уравнения существует локально и при достаточно гладком Г глобально. Параллельный перенос — линейный оператор из касательного пространства в начале кривой в касательное пространство в конце кривой.

В элементарной геометрии перенос — преобразование, сохраняющее расстояния и углы. Рассмотрим случай метрики g_{ij}.

Определение. *Связность согласована с метрическим тензором ("риманова" в случае риманова метрического тензора), если* $\nabla g_{ij} = 0$.

Теорема. *Если* $\det g_{ij} \neq 0$, *то существует единственная согласованная связность, для которой* $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, *где*

$$\Gamma^k_{ij} = 1/2 g^{kl}(\frac{\partial gl_j}{\partial x^i} + \frac{\partial g_i l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})\ (*)$$

Доказательство. $\nabla_k g_{ij} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{l_j}\Gamma^l_{ik} + g_{il}\Gamma^l_{jk}$.

Переставим индексы циклически:

$$\frac{\partial g_i k}{\partial x^i} = g_{lk}\Gamma^l_{ji} + g_{jl}\Gamma^l_{ki},$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = g_{li}\Gamma^l_{kj} + g_{kl} - \Gamma^l_{ij}$$

Суммой и разностью этих соотношений получается $(*)$.

Насколько полученные понятия метрики, связности, переноса согласуются с геометрической интуицией? Метрика нужна для поднятия и опускания индексов – отождествления векторов и ковекторов, матриц и квадратичных форм и т.п.

Задачи:

1)Ковариантное дифференцирование согласовано с опусканием индексов.

2) Если связность согласована с метрикой, то при параллельном переносе сохраняется скалярное произведение $S^i(t)$ на $T^i(t)$.

Недостаток связности — она не тензор. Попробуем составить комбинации, являющиеся тензорами.

Тензор кривизны:

$$R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{qk} - \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql}.$$

Тензор кручения:

$$T_{kl}^{p} = \Gamma_{kl}^{p} - \Gamma_{lk}^{p}$$

Задача

1) R, T — тензоры. (Для T очевидно).

2) (Теорема). $(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)T^i = -R_{qkl}^{i} T^q + T_{kl}^{p} \frac{\partial T^i}{\partial x^p}$.

Выясним геометрический смысл тензора кривизны. Рассмотрим три векторных поля ξ, η, α.

Положим

$$[T(\xi, \eta)]^i = T_{kl}^{i} \xi^k \eta^l; \ [R(\xi, \eta)\alpha] = R_{jkl}^{i} \xi^k \eta^l \alpha^j.$$

Задача

1) $T(\xi, \eta) = \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi - [\xi, \eta]$.

2) $R(\xi, \eta)\alpha = \nabla_\eta \nabla_\xi \alpha - \nabla_\xi \nabla_\eta \alpha + \nabla_{[\xi, \eta]} \alpha$

Здесь $[\xi, \eta] = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}$ — скобка Ли векторных полей.

Зафиксируем ξ, η . Тогда по полю α получим новое поле, т.е. имеем оператор на векторных полях. В точке получим автоморфизм касательного пространства. Он устроен так: возьмем контур в касательной площадке к ξ, η ; обнесем по нему α. Разность результата и исходного вектора разделим на площадь контура и устремим к 0. Получим предельный вектор, т.е. результат измеряет отличие касательной плоскости от евклидовой.

Это ковариантное определение продолжается в сложных ситуациях.

Идея доказательства: правая часть равенства линейно зависит от векторных полей. Остается проверить на базисных полях.

В дальнейшем считаем, что кручение равно 0.

При помощи метрики опустим вниз индекс кривизны.

$R_{iqkl} = g_{ip} R_{qkl}^{p}$ — риманов тензор кривизны.

Скалярная кривизна $R = g^{ql} R_{qli}^{i}$. Риманова кривизна обладает многими симметриями:

$$R_{iqkl} = -R_{qikl}; \ R_{iqkl} = R_{kliq} (\text{задача}).$$

Задача. Существует локальная карта, в которой

$$g_{ij} = \delta_{ij} = 1/3 R_{ikjl} x^k x^l + E_{ikjl} x^k x^l \ , \text{ где } E \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

Эта карта получается экспоненциальным отображением касательной плоскости:

геодезическая

Проектируем геодезическую на плоскость с сохранением длины. Так и получим карту.

Пример. Рассмотрим поверхность в трехмерном пространстве. Из-за симметрии первые и вторые два индекса римановой кривизны должны быть разными. Поэтому с точностью до знака все равно R_{1212}.

Поверхность локально задана как график $z = f(x, y)$. Тогда:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + df^2, \; g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial z^i}\frac{\partial f}{\partial z^j},$$

где $z' = x, \; z^2 = y$.

Если подставить g в формулы, получим $R_{1212} = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ — гессиан.

Этот тензор зависит от системы координат, но скалярная величина не зависит, она равна: $R = 2\det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = 2 \times$ гауссова кривизна.