ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

II курс, II семестр, 1995/96 уч.г.; лектор С.М.Гусейн–Заде.

Лекция N 10 (18 апреля 1996 г.)

Доказательство леммы Сарда.

Доказательство леммы (теоремы) Сарда будет проводиться методом индукции. Чтобы не перегружать его, на каждом этапе мы будем доказывать только, что множество $N^p_{\text{рег}}$ регулярных значений (бесконечно дифференцируемого) отображения $f : M^n \to N^p$ всюду плотно в образе. В действительности это достаточно по следующим соображениям. Пусть $M^n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$, где K_i — компакты. Тогда $N^p_{\text{рег}} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} N_i$, где множества $N_i = (N \setminus f(\{\text{множество нерегулярных точек f}\} \cap K_i))$ открыты, т.к. множества $\{\text{множество нерегулярных точек f}\} \cap K_i$ компактны.

Общий (впрочем, как и первый) шаг индукции будет основан на лемме Сарда для функций (т.е. для $p = 1$). Этот случай будет рассмотрен чуть позже (см. ниже). Предположим, что утверждение леммы Сарда справедливо для любых отображений многообразий размерности $(n-1)$ в многообразия размерности $(p-1)$. Докажем его для отображения многообразия размерности n в многообразие размерности p. В соответствии с леммой 2 прошлой лекции (если каждое из счетного числа свойств имеет место почти всюду, то и все они одновременно имеют место почти всюду) достаточно доказать его для отображения, заданного в пределах координатной окрестности, т.е. для отображения $f : U \to \mathbf{R}^p$ области $U \subset \mathbf{R}^n$. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_p)$, где $f_i : U \to \mathbf{R}$. Рассмотрим p-ую компоненту $f_p : U \to \mathbf{R}$ отображения f. Из леммы Сарда для функций следует, что множество регулярных значений функции f_p всюду плотно в $\mathbf{R}$. Пусть y_p — регулярное значение f_p. Множество $L^{n-1} = \{x \in U : f_p(x) = y_p\}$ является $(n-1)$-мерным подмногообразием в U. Рассмотрим отображение $f^* = (f_1, \ldots, f_{p-1}) : L^{n-1} \to \mathbf{R}^{p-1}$. По предположению индукции множество регулярных значений f^* плотно в $\mathbf{R}^{p-1}$. Если точка $y^* = (y_1, \ldots, y_{p-1})$ является регулярным значением отображения f^*, то точка $y = (y_1, \ldots, y_{p-1}, y_p)$ является регулярным значением f. Это следует из того, что в окрестности любой точки $x \in L^{n-1}$ могут быть выбраны локальные координаты, одной из которых (для определенности — последней) является функция f_p. В таких координатах матрица дифференциала отображения f в точке x имеет вид

$$\begin{pmatrix} df^*(x) & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и поэтому если $\mathrm{rk}(df^*(x)) = p-1$, то $\mathrm{rk}(df(x)) = p$. Тем самым доказано, что множество регулярных значений f всюду плотно в $\mathbf{R}^p$.

Описанный шаг индукции позволяет свести доказательство к двум случаям: 1) $n = 0$, $p > 0$; 2) $p = 1$. Первый из них тривиален, а второй эквивалентен лемме Сарда для функций, к доказательству которой мы приступаем.

<u>Доказательство леммы Сарда для функций.</u> Доказательство тоже будет проводиться по индукции. Ее первый шаг ($n = 0$) тривиален. Предположим, что утверждение доказано для функций на многообразиях размерности меньше n. Пусть $f : U \to \mathbf{R}$ — гладкая функция ($U \subset \mathbf{R}^n$ — открытая координатная окрестность). В соответствии с уже обсуждавшимися причинами достаточно доказать, что для любого замкнутого координатного куба I^n в координатной окрестности U дополнение к образу множества критических точек функции f, лежащих в I^n, всюду плотно в $\mathbf{R}$. Без потери общности можно считать, что куб I^n — единичный. Пусть X_n — множество точек куба I^n, в которых все частные производные функции f всех порядков вплоть до n-ого включительно равны нулю. Докажем по отдельности, что дополнение к образу X_n и дополнение к образу множества критических точек, лежащих в $I^n \setminus X_n$, всюду плотны в $\mathbf{R}$.

Существует такое $C > 0$, что для любых $x \in X_n$ и $y \in I^n$ имеет место неравенство

$$|f(y) - f(x)| < C\|y - x\|^{n+1}. \qquad (*)$$

Этот факт является прямым следствием формулы Тейлора для функций многих переменных (или может быть выведен из обычной формулы Тейлора, если рассмотреть ограничение функции f на прямую, проходящую через точки x и y). Разобьем куб I^n на N^n кубиков со сторонами $1/N$ и рассмотрим объединение кубиков, имеющих непустое пересечение с X_n. Их количество, конечно, также не превышает

N^n. Вследствие неравенства $(*)$ образ каждого из этих кубиков помещается в интервал длины $2C(\sqrt{n}/N)^{n+1}$. Тем самым для любого N образ множества X_n покрывается конечным количеством интервалов, общая длина которых не превосходит $2C(\sqrt{n})^{n+1}/N$ и, следовательно, не может содержать никакой (непустой) интервал в $\mathbf{R}$.

Пусть x — критическая точка функции f, лежащая в $I^n \setminus X_n$. Существует такой мультииндекс $j = (j_1, \dots, j_n)$, что $\partial_j f = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} = 0$, $\operatorname{grad}(\partial_j f) \neq 0$. Каждое из множеств $V_j = \{a \in U : \partial_j f = 0, \operatorname{grad}(\partial_j f) \neq 0\}$ является $(n-1)$-мерным подмногообразием в U. Точка x является критической точкой функции f на U и, следовательно, критической точкой ограничения функции f на многообразие V_j. Поэтому образ множества критических точек функции f из $I^n \setminus X_n$ лежит в объединениии конечного числа множеств критических значений функций на $(n-1)$-мерных многообразиях и по предположению индукции его дополнение всюду плотно в $\mathbf{R}$.

Это завершает доказательство леммы Сарда.

В качестве приложения леммы Сарда докажем, что всякая гладкая функция на $\mathbf{R}^n$ может быть немного пошевелена (более точное утверждение см. в формулировке теоремы ниже) так, что она будет иметь только невырожденные критические точки.

<u>Определение 1.</u> Критическая точка x (гладкой) функции $f : M^n \to \mathbf{R}$ называется невырожденной, если матрица вторых производных функции f в ней (в некоторой, а, следовательно, и в любой локальной карте) невырождена, т.е.

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0.$$

<u>Теорема 1.</u> Пусть $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — гладкая функция. Существует такая сколь угодно малая линейная функция $l(x) = \sum_{i=1}^{n} l^i x_i$, что функция $\tilde{f}(x) = f(x) - l(x)$ имеет только невырожденные критические точки.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим отображение $\operatorname{grad} f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$:

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

Точка x является критической точкой функции $\tilde{f}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{grad} f(x) = (l^1, \dots, l^n)$. При этом матрица вторых производных функции $\tilde{f}$ в точке x совпадает с матрицей дифференциала отображения $\operatorname{grad} f$ в этой точке. По лемме Сарда множество векторов $(l^1, \ldots, l^n) \in \mathbf{R}^n$, являющихся регулярными значениями отображения $\operatorname{grad} f$, плотно в R^n.

Степень отображения и индекс пересечения.

Пусть M^n и N^p — гладкие многообразия (без края), многообразие M^n компактно. L^q — подмногообразие в N^p. Из прошлой лекции прошлой лекции мы знаем, что: 1) отображения $M^n \to N^p$, трансверсальные к L^q, образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех отображений $M^n \to N^p$; 2) если отображение $f : M^n \to N^p$ трансверсально к подмногообразию L^q, то прообраз $f^{-1}(L^q)$ многообразия L^q является подмногообразием размерности $n - (p - q)$ в M^n (пустым, если $n - (p - q) < 0$). Мы будем рассматривать случай, когда $n = (p - q)$ и поэтому прообраз $f^{-1}(L^q)$ многообразия L^q нульмерен, т.е. состоит из конечного числа точек. В этом случае по соображениям размерности условие трансверсальности отображения $f : M^n \to N^p$ к подмногообразию L^q в точке $x \in f^{-1}(L^q) \subset M^n$ может быть записано в виде $T_{f(x)}N^p = T_{f(x)}L^q \bigoplus f_* T_x M^n$ (при этом f_* является изоморфизмом $T_x M^n$ на $f_* T_x M^n$). Если π — каноническая проекция $T_{f(x)}N^p$ на факторпространство $T_{f(x)}N^p / T_{f(x)}L^q$, то композиция $\pi \circ f_*$ является изоморфизмом между $T_x M^n$ и $T_{f(x)}N^p / T_{f(x)}L^q$. Векторное пространство $\nu_y L = T_y N^p / T_y L^q$ (размерности $(p - q)$) называется нормальным пространством к подмногообразию $L^q \subset N^p$ в точке $y \in L^q$. Предположим, что многообразия M^n, N^p и L^q ориентированны. Ориентации многообразий определяют ориентации векторных пространств $T_{f(x)}N^p$, $T_{f(x)}L^q$ и $f_* T_x M^n$ (ориентация пространства $f_* T_x M^n$ определяется ориентацией пространства $T_x M^n$, т.к. $f_* : T_x M^n \to f_* T_x M^n$ является изоморфизмом). Ориентации двух последних из указанных пространств определяют естественную ориентацию их прямой суммы $T_{f(x)}L^q \bigoplus f_* T_x M^n = T_{f(x)}N^p$. Эта ориентация может либо совпадать с собственной ориентацией пространства $T_{f(x)}N^p$, либо отличаться от неё. Пусть знак $sgn(x)$ точки x равен 1 в случае совпадения ориентаций и (-1) в случае их различия. Знак $sgn(x)$ совпадает со знаком детерминанта обратимого линейного отображения $\pi \circ f_* : T_x M^n \to \nu_{f(x)} L$ (относительно естественной ориентации нормального пространства $\nu_{f(x)} L = T_{f(x)}N^p / T_{f(x)}L^q$, определяемой ориентациями векторных пространств $T_{f(x)}N^p$ и $T_{f(x)}L^q$).

Определение 2. Индексом $ind_L(f)$ отображения $f : M^n \to N^p$ по отношению к подмногообразию $L^q \subset N^p$, к которому оно трансверсально, называется сумма по всем точкам x прообраза $f^{-1}(L^q)$ подмногообразия L^q знаков $sgn(x)$:

$$ind_L(f) = \sum_{x \in f^{-1}(L^q)} sgn(x).$$

Определение 3. Индексом $ind_L(f)$ произвольного отображения $f : M^n \to N^p$ по отношению к подмногообразию $L^q \subset N^p$ называется индекс $ind_L(\tilde{f})$ достаточно близкого к f отображения $\tilde{f}$, трансверсального к подмногообразию L^q.

Корректность последнего определения (независимость от выбора шевеления $\tilde{f}$ отображения f) вытекает из следующих двух утверждений.

Лемма 1. Пусть M^n и N^p — гладкие многообразия, M^n компактно, f — произвольное (даже не обязательно гладкое) отображение $M^n \to N^p$. Тогда любое достаточно близкое к f (в классе C^0) отображение $\tilde{f}$ гомотопно f.

Теорема 2. Пусть гладкие многообразия M^n, N^p и L^q — такие же, как и раньше (без края, $L^q \subset N^p$, M^n компактно, $n = (p-q)$), f_i $(i = 0, 1)$ — гомотопные (гладкие) отображения $M^n \to N^p$, трансверсальные к L^q. Тогда их индексы $ind_L(f_0)$ и $ind_L(f_1)$ по отношению к подмногообразию L^q равны.

Доказательство леммы 1 оставляется в виде упражнения.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f_t : M^n \to N^p$ $(t \in I = [0,1])$ — гомотопия между отображениями f_0 и f_1. Без ограничения общности можно предполагать, что $f_t = f_0$ (соответственно $f_t = f_1$) для t, достаточно близких к 0 (соответственно — к 1). Пусть F — соответствующее отображение цилиндра $M^n \times I$ в N^p: $F(x,t) = f_t(x)$ для $x \in M^n$, $t \in I$. Пошевелив, если это необходимо, отображение F, можно предполагать, что оно гладкое и трансверсально к подмногообразию $L^q \subset N^p$ (и $F(x,t)$ не зависит от t при t близких к концам отрезка I). В этом случае прообраз $F^{-1}(L^q)$ подмногообразия L^q является (компактным) одномерным подмногообразием цилиндра $M^n \times I$, совпадающим с произведением прообраза $f_0^{-1}(L^q)$ (соответственно —

прообраза $f_1^{-1}(L^q)$) на отрезок около основания $M^n \times \{0\}$ (соответственно — около основания $M^n \times \{1\}$) цилиндра $M^n \times I$. Кривая $F^{-1}(L^q)$ состоит из нескольких окружностей и нескольких отрезков, начинающихся и кончающихся на основаниях цилиндра. Некоторые из этих отрезков соединяют прообразы подмногообразия L^q, лежащие на одном основании, а некоторые — на разных. Утверждается, что во втором случае знаки соответствующих точек (концов отрезка) совпадают, а в первом — отличаются друг от друга. Отсюда очевидным образом следует равенство индексов $ind_L(f_0)$ и $ind_L(f_1)$. Докажем различие знаков концов отрезка, находящихся на одном и том же основании цилиндра (случай, когда концы отрезка находятся на разных основаниях, разбирается аналогично). Пусть, например, отрезок $\ell = \{w(\tau)\} = (\tau \in [0,1]$, отображение $\tau : [0,1] \to M^n \times I$ является иммерсией, т.е. его дифференциал не обращается в нуль) является компонентой линейной связности кривой $F^{-1}(L^q)$, $w(\tau) = (x(\tau), t(\tau))$, где $x(\tau) \in M^n$, $t(\tau) \in I$, точки $w(0)$ и $w(1)$ лежат на основании $M^n \times \{0\}$ (т.е. $t(0) = t(1) = 0$, $x(i) \in f_0^{-1}(L^q)$ для $i = 0, 1$). Мы хотим доказать, что $sgn(x(1)) = -sgn(x(0))$. Имеем $sgn(x(i)) = sgn(\det(\pi_i \circ f_{0*|x(i)}))$, где π_τ — естественная проекция $T_{F(w(\tau))}N^p \to \nu_{F(w(\tau))}L = T_{F(w(\tau))}N^p / T_{F(w(\tau))}L^q$, $\pi_i \circ f_{0*|x(i)} : T_{x(i)}M^n \to \nu_{f(x(i))}L$ ($\tau \in I$, $i = 0, 1$). Выберем на цилиндре $M^n \times I$ какую-нибудь риманову метрику, относительно которой образующие $\{x\} \times I$ цилиндра ($x \in M^n$) ортогональны его основаниям. Пусть Π_τ — проекция касательного пространства $T_{w(\tau)}(M^n \times I)$ на касательное пространство $T_{w(\tau)}\ell$ к кривой ℓ, определяемая этой метрикой. Для касательного вектора $v \in T_{w(\tau)}(M^n \times I)$ положим $\Pi_\tau(v) = a_\tau(v) \cdot \frac{dw(\tau)}{d\tau}$. a_τ является (линейным) отображением касательного пространства $T_{w(\tau)}(M^n \times I)$ **<u>на</u>** R^1. Пусть $A_\tau = (\pi_\tau \circ F_{*|w(\tau)}, a_\tau)$ — линейное отображение касательного пространства $T_{w(\tau)}(M^n \times I)$ в прямую сумму $\nu_{F(w(\tau))}L \bigoplus \mathbf{R}^1$ нормального пространства $\nu_{F(w(\tau))}L$ и (канонического) одномерного пространства $\mathbf{R}^1$. Касательное пространство $T_{w(\tau)}(M^n \times I)$ к цилиндру $M^n \times I$ естественным образом изоморфно прямой сумме $T_{x_\tau}M^n \bigoplus R^1$. Для $i = 0, 1$ имеем

$$A_i = \begin{pmatrix} \pi_i \circ f_{0*|x(i)} & 0 \\ 0 & \left(\frac{dt(\tau)}{d\tau}\right)^{-1}_{|\tau=i} \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Отображение A_τ является изоморфизмом. Это следует из того, что отображение $\pi_\tau \circ F_* : T_{w(\tau)}(M^n \times I) \to \nu_{F(w(\tau))}L$ эпиморфно (что эквивалентно трансверсальности отображения F к подмногообразию L^q в точке $w(\tau) \in M^n \times I$), а прямое слагаемое $\{0\} \times \mathbf{R}^1 \subset \nu_{F(w(\tau))}L \bigoplus \mathbf{R}^1$ содержится в образе отображения A_τ, поскольку в него переходит касательное пространство $T_{w(\tau)}\ell \subset T_{w(\tau)}(M^n \times I)$ к кривой ℓ. Из того, что отображение A_τ обратимо при всех $\tau \in I$, следует, что $sgn(\det A_0) = sgn(\det A_1)$. Вследствие (*) имеем $\det A_i = \det(\pi_i \circ f_{0\,*|x(i)}) \cdot \left(\frac{dt(\tau)}{d\tau}\right)^{-1}$. При этом $\left(\frac{dt(\tau)}{d\tau}\right)_{|\tau=0} > 0$, $\left(\frac{dt(\tau)}{d\tau}\right)_{|\tau=1} < 0$. Следовательно $sgn(x(1)) = \det(\pi_1 \circ f_{0\,*|x(1)}) = -\det(\pi_0 \circ f_{0\,*|x(0)}) = -sgn(x(0))$, что и требовалось доказать.

Пусть $n = p$, $q = 0$, многообразие N^n линейно связно, L^0 — точка y многообразия N^n. Трансверсальность отображения $f : M^n \to N^n$ по отношению к точке y эквивалентна тому, что y является регулярным значением отображения f.

Определение 4. Индекс $ind_y(f)$ отображения $f : M^n \to N^n$ по отношению к точке (нульмерному подмногообразию) y называется степенью отображения f (и обозначается $\deg f$).

Корректность определения (т.е. независимость от выбора точки y) вытекает из Теоремы 2 и следующего утверждения, доказательство которого оставляется в виде упражнения.

Лемма 2. Пусть y_t ($t \in [0, 1]$) — гладкий путь в многообразии N^n. Тогда существует такое гладкое по t семейство диффеоморфизмов φ_t многообразия N^n в себя, для которого $\phi_0 = id$, $\phi_1(y_0) = y_1$.

Из теоремы 1 следует, что степень является инвариантом класса гомотопных отображений. Нетрудно видеть, что если многообразие N^n не компактно, то $\deg f = 0$.

Лекция N 11 (25 апреля 1996 г.)

Степень отображения и индекс пересечения (продолжение)

На прошлой лекции были определены индекс $ind_L(f)$ отображения $f : M^n \to N^p$ многообразия M^n в многообразие N^p относительно подмногообразия $L^q \subset N^p$ $(n = p - q)$ и степень $\deg f$ отображения $f : M^n \to N^n$ многообразий одинаковой размерности (все участвующие многообразия ориентированны, многообразие M^n замкнуто). Оба указанных инварианта являются инвариантами гомотопического класса отображения f. Обсудим некоторые свойства и приложения этих понятий.

Пусть M^n — замкнутое ориентированное связное многообразие. Любая дифференциальная n –форма ω на M^n замкнута. Из теоремы Стокса следует, что если n–форма ω точна, то её интеграл по всему многообразию M^n равен нулю. Следовательно, интеграл n–формы ω по многообразию M^n является инвариантом класса формы ω в группе когомологий де Рама $H^n_{dR}(M^n)$. Форма объёма на многообразии M^n (соответствующая какой–нибудь римановой метрике на нём) является дифференциальной n–формой, интеграл которой по M^n положителен. Отсюда следует, что интеграл по многообразию определяет эпиморфизм $int : H^n_{dR}(M^n) \to \mathbf{R}$. (В действительности int является изоморфизмом (для связного многообразия M^n), но мы пока не в состоянии это доказать.) Пусть $f : M^n \to N^n$ — отображение M^n в другое замкнутое ориентированное связное многообразие той же размерности. Имеется следующая диаграмма отображений:

$$\begin{array}{ccc} H^n_{dR}(N^n) & \xrightarrow{f^*} & H^n_{dR}(M^n) \\ {\scriptstyle int}\downarrow & & {\scriptstyle int}\downarrow \\ \mathbf{R} & & \mathbf{R} \end{array}$$

Попытаемся выяснить, замыкается ли эта диаграмма до коммутативной, т.е. существует ли такое число $k \in \mathbf{R}$, что $int \circ f^* = k \cdot int$ (любое линейное отображение $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ является умножением на число), а также описать это число в топологических терминах.

Теорема 1. Пусть M^n и N^n — ориентированные замкнутые связные n–мерные многообразия, ω — дифференциальная n-форма на многообразии N^n, f — отображение $M^n \to N^n$. Тогда

$$\int\limits_{M^n} f^*\omega = \deg f \cdot \int\limits_{N^n} \omega. \qquad (1)$$

Замечание. В терминах отождествлений групп $H^n_{dR}(M^n)$ и $H^n_{dR}(N^n)$ с группой $\mathbf{R}$ (определяемых интегралом n–формы по многообразию) Теорема 1 означает, что гомоморфизм $f^* : H^n_{dR}(N^n) \to H^n_{dR}(M^n)$ является умножением на степень $\deg f$ отображения f.

Доказательство. Поскольку обе части равенства (1) линейны относительно ω, достаточно доказать его для формы ω, носитель $\operatorname{supp}\omega$ которой сосредоточен в малой окрестности некоторой точки. Замена отображения f на гомотопное не меняет ни правую, ни левую сторону равенства. Используя лемму 2 прошлой лекции (или, точнее, её аналог; **какой?**), мы можем предполагать что: 1) носитель $\operatorname{supp}\omega$ формы ω содержится в шаровой окрестности U точки $y \in N^n$; 2) точка y является регулярным значением отображения f; 3) прообраз $f^{-1}(U)$ окрестности U состоит из объединения окрестностей U_i прообразов x_i точки y и ограничение отображения f на каждую из окрестностей U_i является диффеоморфизмом. В этом случае

$$\int\limits_{M^n} f^*\omega = \sum_i \int\limits_{U_i} f^*\omega =$$

$$= \sum_i \left(sgn(\det(f_{*|x_i})) \int\limits_U \omega \right) = \left(\sum_i sgn(x_i) \right) \cdot \int\limits_U \omega = \deg f \cdot \int\limits_{N^n} \omega,$$

что и требовалось доказать.

Задача 1. Пусть M^n и N^n комплексно–аналитические многообразия (в частности, их **вещественная** размерность чётна), $f : M^n \to N^n$ — комплексно–аналитическое отображение. Комплексно-аналитические многообразия имеют **естественную** (так называемую, — комплексную) ориентацию. (**Какую?**). Доказать, что $\deg f \geq 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда и M^n и L^q являются подмногообразиями в N^p, многообразие M^n замкнуто, $p = n + q$. Пусть $i : M^n \hookrightarrow N^p$ — отображение вложения.

Определение 1. Индекс $ind_L(f)$ отображения $i : M^n \to N^p$ по отношению к подмногообразию L^q называется индексом пересечения подмногообразий M^n и L^q (и обозначается $(M^n \circ L^q)$).

Заметим, что для замкнутого подмногообразия $M^n \subset N^{2n}$ определён его индекс самопересечения $(M^n \circ M^n)$. Если n нечётно, то $(M^n \circ M^n) = 0$.

Задача 2. Пусть M^n и L^q — замкнутые подмногообразия в N^p, $p = n + q$. Доказать, что $(M^n \circ L^q) = (-1)^{nq}(L^q \circ M^n)$.

Задача 3. Пусть N^p комплексно–аналитическое многообразие, M^n и L^q — его комплексно–аналитические подмногообразия, M^n компактно, $p = n + q$. Верно ли, что $(M^n \circ L^q) \geq 0$?

Эйлерова характеристика.

Пусть $p : E \to M^n$ — гладкое ориентированное n–мерное (вещественное) векторное расслоение над n–мерным замкнутым ориентированным многообразием M^n. (**Задание.** Придумайте определение ориентированного расслоения.) Пространство E является $2n$–мерным многообразием имеющим естественную ориентацию (**Какую?**). Многообразие M^n имеет естественное вложение в E в качестве нулевого сечения.

Определение 2. Индекс самопересечения $(M^n \circ M^n)$ подмногообразия M^n в многообразии E называется эйлеровым классом (или эйлеровым числом) расслоения $p : E \to M^n$.

Из свойств индекса пересечения (см. задачу 2) следует, что если n нечётно, то эйлеров класс n–мерного расслоения $p : E \to M^n$ равен нулю. Частным случаем n–мерного векторного расслоения над n–мерным многообразием M^n является его касательное расслоение $p : TM^n \to M^n$.

Определение 3. Эйлеровой характеристикой $\chi(M^n)$ многообразия M^n называется эйлеров класс его касательного расслоения $p : TM^n \to M^n$.

Для вычисления индекса самопересечения $(M^n \circ M^n)$, участвующего в определении эйлеровой характеристики многообразия M^n, нужно выбрать трансверсальное к M^n шевеление отображения, переводящего многообразие M^n в нулевое сечение касательного расслоения ($x \mapsto (x, 0)$, где $x \in M^n$, $0 \in T_xM^n$, $(x, 0) \in TM^n$). Такое шевеление может быть выбрано в виде $x \mapsto (x, v(x))$, где $v = v(x)$ — векторное поле на многообразии M^n: $v(x) \in T_x M^n$, $(x, v(x)) \in TM^n$.

<u>Лемма 1.</u> Векторные поля $v(x)$ на многообразии M^n, для которых отображение $s_v : M^n \to TM^n$, переводящее $x \in M^n$ в $(x, v(x)) \in TM^n$, трансверсально к M^n, образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех векторных полей на (замкнутом) многообразии M^n.

<u>Докажите самостоятельно.</u>

Точки, в которых образ отображения $x \mapsto (x, v(x))$ пересекается с нулевым сечением, — это нули векторного поля $v(x)$. В окрестности нуля x_0 в локальных координатах на многообразии M^n векторное поле $v(x)$ записывается в виде $v(x) = v^i(x) \cdot (\partial/\partial x^i)$. Нетрудно проверить, что отображение s_v трансверсально нулевому сечению в особой точке (нуле) x_0 тогда и только тогда, когда эта особая точка невырожденна, т.е. $\det(\partial v^i/\partial x^j)_{|x_0} \neq 0$. Более того,

$$sgn(x_0) = sgn\left(\det(\frac{\partial v^i}{\partial x^j})\right)_{|x_0}.$$

Целое число целое $sgn(x_0)$ называется индексом векторного поля v в особой точке (т.е. — в нуле) x_0.

Частный случай векторного поля на многообразии M^n — градиентное векторное поле $\operatorname{grad} f(x)$ гладкой функции $f : M^n \to \mathbf{R}$ (соответствующее некоторой выбранной римановой метрике на M^n). Нули векторного поля $v(x) = \operatorname{grad} f(x)$ — это критические точки функции f. Описанное выше отображение s_v трансверсально к нулевому сечению в критической точке x_0 тогда и только тогда, когда критическая точка x_0 функции f — морсовская (т.е. $\det(\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j)_{|x_0} \neq 0$). При этом $sgn(x_0) = (-1)^m$, где m — индекс Морса критической точки x_0 — отрицательный индекс инерции формы Гессе (квадратичной формы $(\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j)_{|x_0}$) (или количество отрицательных квадратов в нормальной форме функции f в окрестности точки x_0, описываемой леммой Морса). Следовательно, отображение s_v трансверсально к нулевому сечению (в целом) тогда и только тогда, когда функция f — морсовская (здесь это означает, что все её критические точки — морсовские). Из теоремы 1 прошлой лекции нетрудно вывести, что морсовские функции на многообразии M^n образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех гладких функций.

Следствие 1.

$$\chi(M^n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i k_i,$$

где k_i — количество критических точек морсовской функции $f : M^n \to \mathbf{R}$, индекс Морса которых равен i.

Например, эйлерова характеристика поверхности равна количеству вершин плюс количество впадин минус количество перевалов на графике морсовской функции на ней.

Следствие 2. Если n нечётно, то для морсовской функции $f : M^n \to \mathbf{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i k_i = 0.$$

Задача 4. Доказать, что эйлерова характеристика $\chi(\Pi_g)$ (двумерной) сферы с g ручками (или кренделя с g дырками) равна $(2 - 2g)$.

Формула Гаусса-Бонне.

Пусть M^2 — гладкая замкнутая поверхность, вложенная в трёхмерное евклидово пространство $\mathbf{R}^3$, для определённости — связная (т.е. — сфера с некоторым количеством (g) ручек). Такая поверхность всегда ориентируема (**Докажите!**). Зафиксируем на ней ориентацию, определяемую внешней нормалью. Пусть $n(P) \in \mathbf{R}^3$ — единичный вектор внешней нормали в точке $P \in M^2$, S^2 — стандартная единичная сфера в пространстве $\mathbf{R}^3$. Рассмотрим отображение $\Gamma : M^2 \to S^2$, переводящее точку $P \in M^n$ в $n(P) \in S^2$. Отображение Γ называется гауссовым (или сферическим) отображением (вложенной) поверхности M^2. Пусть ds и $d\sigma$ — формы площади (дифференциальные 2–формы) на поверхности M^2 и на единичной сфере S^2 соответственно (эти формы определяются стандартной евклидовой метрикой на $\mathbf{R}^3$). Нетрудно видеть, что в соответствии с определением гауссовой кривизны $K(P)$ поверхности M^2 в точке P имеет место равенство $\Gamma^* d\sigma = K(P) \cdot ds$.

Теорема 2 (формула Гаусса-Бонне).

$$\int_{M^2} K(P) ds = 2\pi \cdot \chi(M^2).$$

Замечание. В действительности аналог указанной теоремы имеет место для любой вложенной гиперповерхности $M^{2n} \subset \mathbf{R}^{2n+1}$ в нечётномерном евклидовом пространстве. В этом случае ds и $d\sigma$ — формы объёма, а формула $\Gamma^* d\sigma = K(x) \cdot ds$ даёт определение гауссовой кривизны $K(x)$, коэффициент 2π должен быть заменен на половину ($2n$–мерного) объёма единичной сферы $S^{2n} \subset \mathbf{R}^{2n+1}$.

Доказательство. По теореме 1

$$\int\limits_{M^2} K(x) ds = \deg \Gamma \cdot \int\limits_{S^2} d\sigma = 4\pi \cdot \deg \Gamma.$$

Таким образом надо показать, что $\deg \Gamma = \chi(M^2)/2$. Будем отождествлять точки пространства $\mathbf{R}^3$ с соответствующими векторами. По точке (единичному вектору) $n \in S^2$ определим "функцию высоты" H_n на поверхности M^2 формулой $H_n(P) = (n, P)$ для точки P из M^2. Здесь через $(\bullet, \bullet)$ обозначается (евклидово) скалярное произведение векторов из $\mathbf{R}^3$. Нетрудно видеть, что критическими точками функции H_n являются прообразы относительно гауссова отображения Γ двух противоположных точек n и $(-n)$ из S^2. Выберем такое n_0, что и n_0 и $(-n_0)$ являются регулярными значениями гауссова отображения $\Gamma : M^2 \to S^2$. Без ограничения общности можно считать, что $n_0 = (0, 0, 1)$ (в некоторых евклидовых координатах x, y и z в пространстве $\mathbf{R}^3$). Функцию высоты, соответствующую вектору n_0, будем обозначать просто через H. При этом $H(x, y, z) = z$. Соотнесём степень гауссова отображения Γ с эйлеровой характеристикой поверхности M^2, вычисленной по критическим точкам функции высоты H (будет показано, что все критические точки функции H являются морсовскими). Пусть P — одна из критических точек функции H. Для определённости будем считать, что $\Gamma(P) = n_0$. По теореме о неявной функции в окрестности точки P поверхность M^2 может быть задана уравнением $z = h(x, y)$, где функция h является записью в локальных координатах (x, y) на поверхности M^2 функции высоты H. В (локальных) координатах (x, y) гауссово отображение Γ может быть записано в виде

$$\Gamma(x, y) = \frac{(1, h'_x, h'_y)}{\sqrt{1 + (h'_x)^2 + (h'_y)^2}}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Gamma(x,y) = (1, h'_x, h'_y) + O(x^2+y^2).$$

Отсюда видно что матрица Якоби (т.е. матрица дифференциала) гауссова отображения Γ в точке P совпадает с матрицей Гессе (т.е. — с матрицей вторых производных) функции высоты H в этой точке (которая для функции H является критической). Если $\Gamma(P) = -n_0$, то эти две матрицы отличаются знаком.

<u>Задача 5.</u> Равенство матриц Гессе и Якоби не может иметь место во всех локальных системах координат, поскольку, во–первых, они — координатные записи объектов различной тензорной природы и, более того, матрица Якоби зависит от выбора локальных координат на образе S^2, в то время как форма Гессе — нет. Объясните смысл указанного равенства.

Из совпадения матриц Якоби и Гессе с точностью до знака вытекает, что знак $sgn(P)$ прообраза точки n_0 или $(-n_0)$ относительно отображения Гаусса Γ равен $(-1)^m$, где $m = m(P)$ — индекс Морса точки P как критической точки функции H. (В этом месте существенно используется факт, что для функций двух (как и любого чётного числа) переменных чётность индекса Морса критической точки функции f совпадает с чётностью индекса Морса этой же критической точки для функции $(-f)$).

Отсюда следует, что

$$\deg \Gamma = \sum_{P\in\Gamma^{-1}(n_0)} (-1)^{m(P)} = \sum_{P\in\Gamma^{-1}(-n_0)} (-1)^{m(P)}.$$

С другой стороны

$$\chi(M^2) = \sum_{P\in\Gamma^{-1}(n_0)\cup\Gamma^{-1}(-n_0)} (-1)^{m(P)} = 2\deg f,$$

что и требовалось доказать.