Независимый Московский Университет
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
II курс, II семестр, 1995/96 уч.г.; лектор С.М.Гусейн–Заде.
Лекции N 1–2 (15, 22 февраля 1996 г.).

Основным предметом изучения в первой половине текущего семестра будет понятие связности (ковариантного дифференцирования) на многообразиях или в произвольных векторных расслоениях.

Локально тривиальные расслоения.

Для гладкого (C^∞) многообразия M^n определено понятие касательного пространства TM^n_x к многообразию M^n в точке $x \in M^n$. Пусть $TM^n = \bigcup\limits_{x \in M^n} TM^n_x = \{(x, v) : x \in M^n, v \in TM^n_x\}$ — объединение касательных пространств TM^n_x во всем точкам x многообразия M^n. Имеется естественное отображение (проекция) $p : TM^n \to M^n$ пространства (или пока правильнее – множества) TM^n на многообразие M^n, переводящее пару (x, v) в точку $x \in M^n$. При этой проекции прообразы точек (слои) $p^{-1}(x)$ являются векторными пространствами (TM^n_x). Эти слои образуют семейство зависящее от точки x. При этом естественным является представление, что касательное пространство TM^n_x непрерывно и даже гладко зависит от точки x. Последнее утверждение означает, в частности, что на TM^n имеется естественная структура топологического пространства и даже — гладкого многообразия. Она определяется следующим образом. Пусть $U \subset M^n$ — открытое подмножество многообразия M^n, диффеоморфное области Ω стандартного векторного пространства $\mathbf{R}^n$ (координатная окрестность). Касательное пространство к векторному пространству $\mathbf{R}^n$ в любой точке естественным образом отождествляется с самим $\mathbf{R}^n$. Координаты на U (диффеоморфизм $U \to \Omega$) определяют взаимно-однозначное соответствие между прообразом $p^{-1}(U) = TU$ (объединением касательных пространств TM^n_x по всем точкам $x \in U$) и множеством $T\Omega = \Omega \times \mathbf{R}^n$. Последнее множество имеет естественные структуры топологического пространства и гладкого многообразия, которые тем самым переносятся и на TU. Нетрудно видеть, что эта структура не зависит от выбора (локальной) системы координат, т.е. замена координат индуцирует отображение, являющееся диффеоморфизмом. Тем самым определены структуры топологического пространства и гладкого многообразия на TM^n (называемом пространством касательного расслоения к многообразию M^n). Аналогично устроены пространство T^*M^n кокасательного расслоения к многообразию M^n (объединение всех кокасательных пространств $T^*M^n_x$), пространство $T^{p,q}M^n$ расслоения тензоров типа (p,q) (объединение (векторных) пространств $T^{p,q}M^n_x$ тензоров типа (p,q) на касательных пространствах TM^n_x) ... Понятие векторного расслоения является естественным обобщением этих примеров и его определение моделирует их описание.

Пусть X и F — топологические пространства.

Определение 1. Расслоением (локально-тривиальным) со слоем F над пространством X называется отображение $p : E \to X$ топологического пространства E на пространство X такое, что для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U = U(x)$, для которой прообраз $p^{-1}(U)$ изоморфен прямому произведению $U \times F$, т.е. существует гомеоморфизм $\Phi : U \times F \to p^{-1}(U)$, сохраняющий слои над точками, т.е. коммутирующий с проекциями $\pi_1 : U \times F \to U$ и $p : p^{-1}(U) \to U$: $p \circ \Phi = \pi_1$.

Замечания. 1. Пространство E называется пространством расслоения, а X — его базой. Иногда (особенно если из контекста ясно, о каком отображении p идёт речь) про само пространство E говорят, что оно является (локально-тривиальным) расслоением над X.

2. Слоем расслоения $p : E \to X$ может называться как топологическое пространство F, так и прообраз $p^{-1}(x)$ любой точки x (впрочем, последний, конечно, гомеоморфен F).

3. Говорят, что расслоение $p : E \to X$ является гладким, если все объекты, фигурирующие в определении, принадлежат соответствующей категории, т.е. пространства E, X и F являются гладкими многообразиями, p — гладким отображением, а Φ — диффеоморфизмом.

Определение 2. Пусть $p : E \to X$ и $p' : E' \to X$ — два расслоения над пространством X. Говорят, что эти расслоения изоморфны, если существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) $\Theta : E \to E'$, сохраняющий слои над точками, т.е. коммутирующий с проекциями p и p': $p' \circ \Theta = p$.

Определение 3. Расслоением–произведением (с базой X и слоем F) называется $\pi_1 : X \times F \to X$ (π_1 — проекция на первый сомножитель. Говорят, что расслоение $p : E \to X$ является тривиальным, если оно изоморфно расслоению–произведению.

Пусть $\{U_\alpha\}$ — покрытие пространства (или многообразия в гладком случае) X открытыми множествами, над которыми расслоение $p : E \to X$ тривиально, т.е. существуют гомеоморфизмы (диффеоморфизмы) $\Phi_\alpha : U_\alpha \times F \to p^{-1}(U_\alpha)$, для которых $p \circ \Phi_\alpha = \pi_1$ (проекция $U_\alpha \times F$ на первый сомножитель). Предположим, что U_α и U_β — два множества из этого покрытия. Для пространства $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ определены два гомеоморфизма с $p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ — ограничения Φ_α и Φ_β соответсвенно. Пусть $\Psi_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{-1} \circ \Phi_\beta : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$. Имеет место равенство $\pi_1 \circ \Psi_{\alpha\beta} = \pi_1$. Следовательно, отображение $\Psi_{\alpha\beta}$ имеет вид $\Psi_{\alpha\beta}(x, y) = (x, \psi_{\alpha\beta}(x)y)$, где $x \in U_\alpha \cap U_\beta \subset X$, $y \in F$, $\psi_{\alpha\beta}(x)$ — гомеоморфизм (диффеоморфизм) пространства (многообразия) F. Тем самым определено отображение $\psi_{\alpha\beta}$ пересечения $U_\alpha \cap U_\beta$ областей U_α и U_β в группу $Homeo(F)$ гомеоморфизмов слоя F (или в группу $Diff(F)$ его диффеоморфизмов).

Замечание. Естественно предположить, что $\psi_{\alpha\beta}$ является непрерывным отображением $(U_\alpha \cap U_\beta) \to Homeo(F)$ (или даже гладким отображением $(U_\alpha \cap U_\beta) \to Diff(F)$). Однако, для того, чтобы придать этой фразе смысл в традиционном виде, нужно было бы определить на $Homeo(F)$ структуру топологического пространства, что не вполне тривиально, либо определить на $Diff(F)$ структуру гладкого многообразия, что вообще невозможно в рамках рассматриваемых понятий (нами определялись только **конечномерные** многообразия). Однако, можно обойти указанную трудность, если принять следующее определение. Будем говорить, что отображение $\psi : U \to Homeo(F)$ (отображение $\psi : U \to Diff(F)$) является непрерывным (соответственно — гладким), если отображение $\Psi : U \times F \to U \times F$, определяемое формулой $\Psi(x, y) = (x, \psi(x)y)$ $(x \in U,\ y \in F)$, является непрерывным (соответственно — гладким).

Нетрудно видеть, что там, где это имеет смысл, (на пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$) имеет место равенство

$$\psi_{\alpha\gamma} = \psi_{\alpha\beta}\psi_{\beta\gamma}. \qquad (*)$$

Отображения $\Psi_{\alpha\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ называются отображениями склейки расслоения $p : E \to X$. Отображения $\psi_{\alpha\gamma}$ (функции на $U_\alpha \cap U_\beta$ со значениями в $Homeo(F)$ или в $Diff(F)$) называются функциями перехода этого расслоения.

Можно показать, что расслоение (со слоем F) над пространством X определяется покрытием $\{U_\alpha\}$ пространства X и набором функций перехода $\psi_{\alpha\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \to Homeo(F)$, (или $(U_\alpha \cap U_\beta) \to Diff(F)$), удовлетворяющих условию (*). По этому набору данных пространство расслоения E и его отображение p на пространство X могут быть определены следующим образом. Пространство E является фактор-пространством несвязного объединения $\coprod\limits_{\alpha}(U_\alpha \times F)$ прямых произведений $U_\alpha \times F$ по отношению эквивалентности: если $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ то $(x, y) \in U_\beta \times F$ эквивалентно $(x, \psi_{\alpha\beta}(x)y) \in U_\alpha \times F$; отображение p индуцированно проекциями на первые сомножители, т.е. отображениями $(x, y) \mapsto x$. Координатным заданием (локально тривиального) расслоения $p : E \to X$ называется его определение набором данных $(\{U_\alpha\}, \{\psi_{\alpha\beta}\})$ (покрытием $\{U_\alpha\}$ и функциями перехода $\psi_{\alpha\beta}$).

Задача. Дать "координатное" определение изоморфности двух расслоений.

Пусть G — подгруппа группы $Homeo(F)$ (или группы $Diff(F)$).

Определение 4. Говорят, что расслоение $p : E \to X$ является расслоением со структурной группой G, если (в координатной форме) оно задается таким набором данных $(\{U_\alpha\}, \{\psi_{\alpha\beta}\})$, что $\psi_{\alpha\beta}(x) \in G$ для любых α, β и $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Наиболее важным является случай, когда G является группой Ли, (т.е. — гладким многообразием со структурой группы, для которой отображение произведения и отображение взятия обратного элемента являются гладкими), например, когда G — одна из классических матричных групп: общая линейная группа $GL(n)$ (над полем $\mathbf{R}$ вещественных или полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел), специальная линейная группа $SL(n)$, группа ортогональных преобразований $O(n)$, ... , что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Пусть $p : E \to X$ — расслоение со структурной группой G (определяемое набором данных $(\{U_\alpha, \psi_{\alpha\beta}))$ $\widetilde{F}$ — пространство (или многообразие), на котором (слева) действует группа G (непрерывно или гладко). (Пространство с действием группы G называется G–пространством.) Действие группы G на $\widetilde{F}$ определяет гомоморфизм j группы G в группу $Homeo(\widetilde{F})$ гомеоморфизмов $\widetilde{F}$ (или в группу $Diff(\widetilde{F})$ его диффеоморфизмов). Отображения $j \circ \psi_{\alpha\beta}$ являются функциями перехода некоторого расслоения $\widetilde{p} : \widetilde{E} \to X$ со слоем $\widetilde{F}$.

Определение 5. Расслоение $\widetilde{p} : \widetilde{E} \to X$ называется ассоциированнам с расслоением $p : E \to X$ (и с G–пространством $\widetilde{F}$).

Задача. Доказать, что ассоциированное расслоение определено корректно, т.е. зависит только от самого расслоения $p : E \to X$, а не от его координатного представления.

Одним из (естественных) G–пространств является пространство F ($G \subset Homeo(F)$ или $G \subset Diff(F)$). Соответствующее ассоциированное расслоение, очевидно, совпадает с расслоением $p : E \to X$. Другим G–пространством является сама группа G.

Определение 6. Расслоение $\widetilde{p} : \widetilde{E} \to X$, ассоциированное с расслоением $p : E \to X$ и с G–пространством G, называется главным G–расслоением, ассоциированным с расслоением $p : E \to X$.

Группа G действует сама на себе как слева, так и справа (и при этом эти два действия коммутируют). Нетрудно видеть, что соответствующие правые действия группы G на пространствах $U_\alpha \times G$ коммутируют с отображениями склейки и поэтому определяют правое действие группы G на пространстве $\widetilde{E}$ главного G–расслоения. Наличие такого действия можно принять в качестве определения главного расслоения: главным G–расслоением называется расслоение $q : H \to X$, слоем которого является группа G, действующая справа (непрерывно или гладко) на пространстве расслоения H так, что орбитами этого действия являются слои расслоения q. (**Задача.** Доказать эквивалентность этого определения определению 6.)

Задача. Доказать, что главное G–раслоение, ассоциированное с расслоением $p : E \to X$, (G — подгруппа группы $Homeo(F)$ или группы $Diff(F)$) определяет само расслоение $p : E \to X$. Описать инвариантную (т.е. — не координатную) конструкцию построения расслоения $p : E \to X$ по соответствующему главному расслоению.

Векторные расслоения.

Теперь пусть (слой) F является (координатным) линейным пространством $\mathbf{R}^n$, подгруппа $G \subset Diff(\mathbf{R}^n)$ — группа $GL(n)$ линейных автоморфизмов $\mathbf{R}^n$.

Определение 7. Расслоение $p : E \to X$ со слоем $\mathbf{R}^n$ и структурной группой $GL(n)$ называется (n–мерным) векторным расслоением над пространством (многообразием X).

Нетрудно видеть, что на слоях $p^{-1}(x)$ ($x \in X$) векторного расслоения имеется естественная структура (n–мерного) векторного пространства. Эквивалентным (и несколько более традиционным) определением векторного расслоения является следующее.

Определение 7*. n–мерным (вещественным) векторным расслоением над пространством X называется локально-тривиальное расслоение $p : E \to X$, слоем F которого является (стандартное) векторное пространство $\mathbf{R}^n$, слои $p^{-1}(x)$ снабжены структурами векторных пространств (т.е. на них определены операции сложения и умножения на числа), а гомеоморфизмы Φ (тривиализации над окрестностями U точек $x \in X$, входящие в определение локально тривиального расслоения (Определение 1)) сохраняют эти структуры (т.е. ограничение Φ на $\{x'\} \times \mathbf{R}^n$ является линейным изоморфизмом на $p^{-1}(x')$ для $x' \in U$). Говорят, что векторное расслоение $p : E \to X$, является гладким, если все объекты, участвующие в его определении (т.е. — X, E, p и Φ), являются гладкими.

Аналогичным образом (с заменой $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{C}^n$) определяется комплексное векторное расслоение.

Из определения вытекает, что операции сложения и умножения на числа, определённые на слоях (прообразах точек), непрерывно (или гладко) зависят от точки. (**Задача.** Сформулировать, что это означает.)

Примеры. 1) Касательное расслоение, кокасательное расслоение, расслоение тензоров типа (p, q), расслоение дифференциальных k–форм на многообразии M^n.

2) Пусть $p_1 : E_1 \to X$ и $p_2 : E_2 \to X$ — два векторных расслоения (размерностей m и n соответственно). Рассмотрим объединение E по всем точкам $x \in X$ прямых сумм $p_1^{-1}(x) \bigoplus p_2^{-1}(x)$ слоёв этих расслоений. Естественно ожидать, что оно является $(m+n)$–мерным векторным расслоением над пространством X (которое является гладким, если таковыми являются оба исходных расслоения). Чтобы это показать, надо определить на E структуру топологического пространства и/или гладкого многообразия. Это можно сделать с помощью распространённой стандартной конструкции (сравните с определением индуцированного расслоения ниже (Лекция 3)). Определим E как подпространство $\{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 : p_1(e_1) = p_2(e_2)\}$ прямого произведения $E_1 \times E_2$. Вложение E в $E_1 \times E_2$ задает на нем структуру топологического пространства. Имеется естественная проекция $p : E \to X$: $p(e_1, e_2) = p_1(e_1) (= p_2(e_2))$. При таком определении легко видеть, что $p : E \to X$ является векторным расслоением. Оно называется прямой суммой векторных расслоений p_1 и p_2 и обозначается через

$p_1 \bigoplus p_2 : E_1 \bigoplus E_2 \to X$.

<u>Задача.</u> Исходя из этого (инвариантного) определения показать, что если расслоения $p_1 : E_1 \to X$ и $p_2 : E_2 \to X$ являются гладкими, то и их прямая сумма является гладким расслоением (в частности показать, что $E_1 \bigoplus E_2$ является гладким многообразием).

В координатной форме векторное расслоение над X задается покрытием $\{U_\alpha\}$ пространства (или многообразия) X (открытыми множествами, над которыми расслоение $p : E \to X$ тривиально) и (непрерывными или гладкими) функциями перехода $\psi_{\alpha\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \to GL(n)$, удовлетворяющих условию (*) (см. выше).

<u>Пример.</u> Пусть $p_1 : E_1 \to X$ и $p_2 : E_2 \to X$ — два векторных расслоения (размерностей m и n соответственно). Переходя, если это необходимо, к пересечению соответствующих покрытий, можно без ограничения общности считать, что покрытия, фигурирующие в координатном определении расслоений $p_1 : E_1 \to X$ и $p_2 : E_2 \to X$, совпадают. Предположим, что эти расслоения задаются наборами $(\{U_\alpha\}, \{\psi^{(1)}_{\alpha\beta}\})$ и $(\{U_\alpha\}, \{\psi^{(2)}_{\alpha\beta}\})$ соответственно ($\psi^{(1)}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(m)$, $\psi^{(2)}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n)$). Тогда их прямая сумма задаётся набором $(\{U_\alpha\}, \{\psi^{(1)}_{\alpha\beta} \bigoplus \psi^{(2)}_{\alpha\beta}\})$, где

$$\psi^{(1)}_{\alpha\beta} \bigoplus \psi^{(2)}_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} \psi^{(1)}_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & \psi^{(2)}_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix}.$$

<u>Задача.</u> Дать определение тензорного произведения векторных расслоений.

<u>Задача.</u> Проективная прямая $\mathbf{RP}^1$ отождествляется с факторпространством проколотой плоскости $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ по отношению эквивалентности: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $y = \lambda x$ ($\lambda \neq 0$). Для $x \in \mathbf{RP}^1$ обозначим через ℓ_x соответствующую прямую в плоскости $\mathbf{R}^2$, т.е. $\{\lambda x : \lambda \in \mathbf{R}\}$. Пусть $E = \{(x, v) \in \mathbf{RP}^1 \times \mathbf{R}^2 : v \in \ell_x\}$. Имеется естественная проекция $p : E \to \mathbf{RP}^1$.

1. Доказать, что $p : E \to \mathbf{RP}^1$ является гладким векторным расслоением.
2. Дать координатное описание этого расслоения (т.е. задать покрытие пространства $\mathbf{RP}^1$ и функции перехода).
3. Выяснить, является ли расслоение p тривиальным.
4. Описать расслоения $p \bigoplus p$ и $p \bigotimes p$.