<u>Лекция N 3 (29 февраля 1996 г.)</u>.

<u>Напоминание: гомотопическая эквивалентность.</u>

Пусть X и Y — топологические пространства, f и g — отображения $X \to Y$.

<u>Определение 4.</u> Отображения f и g гомотопны ($f \sim g$), если существует непрерывное семейство отображений $f_t : X \to Y$ ($t \in I = [0,1]$), для которого $f_0 = f$, $f_1 = g$, т.е. такое непрерывное отображение $F : X \times I \to Y$, что $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ ($F(x,t) = f_t(x)$).

<u>Определение 5.</u> Пространства X и Y гомотопически эквивалентны, если существуют такие отображения (гомотопические эквивалентности) $\phi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$, что $\psi \circ \phi \sim id_X$, $\phi \circ \psi \sim id_Y$.

Предположим, что каждому топологическому пространству X из некоторого класса (например, всякому гладкому многообразию) ставится в соответствие объект $A(X)$ какой-либо категории (число, множество, группа, ...). Говорят, что A является гомотопическим инвариантом, если из гомотопической эквивалентности пространств X и Y следует, что объекты $A(X)$ и $A(Y)$ изоморфны в соответствующем смысле (равны для чисел, допускают взаимно-однозначное соответствие (равномощны) для множеств, изоморфны для групп, ...).

<u>Замечание.</u> Для множеств, групп, ... , т.е. для объектов, для которых имеет смысл говорить об отображениях из соответствующей категории (гомоморфизмах), это определение обычно используют в более сильной форме — требуют чтобы отображению пространств соответствовало отображение соответствующих объектов (в ту же сторону или в противоположную), а гомотопической эквивалентности — изоморфизм.

<u>Теорема 1.</u> Множество $Vect(X)$ классов изоморфных векторных расслоений над пространством X — гомотопический инвариант пространства.

<u>Замечания.</u> 1. Это утверждение (как и большинство утверждений в топологии) имеет место только для "достаточно хороших" пространств (паракомпктных, хаусдорфовых). Чтобы не залезать в вопросы общей топологии, мы докажем его для случая, представляющего наибольший интерес в нашем курсе, — для многообразий. Более того, мы покажем, что для гладких многообразий гомотопическим инвариантом является множество классов изоморфных гладких векторных расслоений.
2. На множестве $Vect(X)$ имеются естественные операции сложения и

умножения (индуцированные прямой суммой и тензорным произведением расслоений). Эти операции обладают большинством свойств, присущих операциям в (коммутативных) кольцах. Однако, относительно сложения множество $Vect(X)$ не является группой (отсутствует вычитание). $Vect(X)$ является только полукольцом.

При **доказательстве теоремы** мы будем действовать по следующей широко распространённой схеме. Для любого отображения $f : X \to Y$ мы определим отображение (даже гомоморфизм полуколец) $f^* : Vect(Y) \to Vect(X)$. Для векторного расслоения $p : E \to Y$ соответствующее векторное расслоение $f^*p : f^*E \to X$ называется расслоением, индуцированным из p с помощью отображения f (или при отображении f). Мы покажем, что имеют место следующие свойства:
1) $id_X^* = id_{Vect(X)}$, т.е. расслоение, индуцированное при тождественном отображении пространства X, совпадает с исходным;
2) если $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, то $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$;
3) если f и g — гомотопные отображения $X \to Y$, то $f^* = g^*$, т.е. расслоения, индуцированные из одного и того же расслоения при помощи гомотопных отображений, изоморфны.

Отсюда гомотопическая инвариантность $Vect(X)$ будет следовать автоматически: если $\phi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$ — (гомотопически) взаимно обратные гомотопические эквивалентности ($\psi \circ \phi \sim id_X$, $\phi \circ \psi \sim id_Y$), то $\phi^* \circ \psi^* = id_{Vect(X)}$, $\psi^* \circ \phi^* = id_{Vect(Y)}$, т.е. ϕ^* и ψ^* являются (взаимно обратными) изоморфизмами.

Итак, пусть $f : X \to Y$ — отображение, $p : E \to Y$ — векторное расслоение над пространством Y. Индуцированное расслоение $f^*p : f^*E \to X$ может быть определено следующим образом. Пространством f^*E этого расслоения является $\{(x, e) \in X \times E : f(x) = p(e)\} \subset X \times E$. Его проекция f^*p на пространство X определяется формулой $f^*p(x, e) = x$. (Сравните с "бескоординатным" определением прямой суммы двух векторных расслоений в Лекциях 1–2.)

<u>**Задача.**</u> Дать "координатное" описание индуцированного расслоения.

Если $X \subset Y$, а $f = i : X \hookrightarrow Y$ — вложение, то индуцированное расслоение i^*p называется ограничением расслоения $p : E \to Y$ на подпространство X и обозначается через $p_{|X}$ (или $E_{|X}$; при этом $E_{|X} = p^{-1}(X) \subset E$).

Свойства 1) и 2) (см. выше) очевидны. Доказательства требует только свойство 3). Пусть f и g — гомотопные отображения $X \to Y$, $p : E \to Y$ — векторное расслоение над Y. По определению гомотопности отображений существует отображение $F : X \times I \to Y$ цилиндра $X \times I$ (I — отрезок $[0,1]$), для которого $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$. (Если f и g — гомотопные гладкие отображения многообразий, то и гомотопия F может быть выбрана гладкой.) Пусть $q : H \to X \times I$ — расслоение, индуцированное из расслоения p при помощи отображения F ($q = F^*p$, $H = F^*E$). Ограничения расслоения q на основания $X \times \{0\}$ и $X \times \{1\}$ цилиндра $X \times I$ совпадают с расслоениями f^*p и g^*p соответственно (подразумевается естественное отождествление этих оснований с пространством X). Поэтому свойство 3) (а с ним и Теорема 1) вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть $q : H \to X \times I$ — (произвольное) векторное расслоение над цилиндром $X \times I$. Тогда ограничения расслоения q на основания $X \times \{0\}$ и $X \times \{1\}$ изоморфны (относительно естественного отождествления этих оснований).

Лемма 1. Для любой точки $x \in X$ существует такая окрестность $U = U(x)$, что ограничение расслоения q на $U \times I$ тривиально.

Эта лемма вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2. Пусть $0 \le a < c_1 < c_2 < b \le 1$. Предположим, что ограничения расслоения $q : H \to X \times I$ на $W_1 = U \times [a, c_2]$ и $W_2 = U \times [c_1, b]$ тривиальны. Тогда и ограничение расслоения q на $W = U \times [a, b]$ тривиально.

Доказательство. Тривиальность ограничений $q_{|W_1}$ и $q_{|W_2}$ означает, что существуют тривиализации (гомеоморфизмы или диффеоморфизмы) $\Phi_i : W_i \times R^n \to H_{|W_i}$ $(i = 1, 2)$, сохраняющие слои ($p \circ \Phi_i = \pi_1$) и линейные на слоях. Предположим, что (каким-то чудом) оказалось, что при $(x, t) \in W_1 \cap W_2$ (т.е. при $c_1 \le t \le c_2$) $\Phi_2(x, t, v) = \Phi_1(x, t, v)$ (*) ($x \in U$, $v \in \mathbf{R}^n$). В этом случае тривиализация $\Phi : W \times R^n \to H_{|W}$ определяется очевидным образом: $\Phi(x, t, v) = \Phi_1(x, t, v)$ при $(x, t) \in W_1$ (т.е. $a \le t \le c_2$), $\Phi(x, t, v) = \Phi_2(x, t, v)$ при $(x, t) \in W_2$ (т.е. $c_1 \le t \le b$). Для доказательства тривиальности расслоения $q_{|W}$ вместо Φ_2 мы построим другую тривиализацию расслоения $q_{|W_2}$, для которой имеет место равенство (*). Пусть $\Psi = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : (U \times [c_1, c_2]) \times \mathbf{R}^n \to (U \times [c_1, c_2]) \times \mathbf{R}^n$. Имеем $\Psi(x, t, v) = (x, t, \psi(x, t)v)$ ($v \in \mathbf{R}^n$, $\psi : (U \times [c_1, c_2]) \to GL(n)$ — функция перехода). Пусть $\tilde{\psi}$ — некоторое продолжение (матрично-значной) функции ψ (определённой на $U \times [c_1, c_2]$) на $U \times [c_1, b]$. Такое непрерывное продолжение может быть определено следующим образом: $\tilde{\psi}(x, t) = \psi(x, t)$ при $c_1 \le t \le c_2$, $\tilde{\psi}(x, t) = \psi(x, c_2)$ при $t \ge c_2$. Построение гладкого продолжения (нужного для доказательства в "гладком" случае) мы обсудим чуть позже. Положим $\tilde{\Psi}(x,t) = (x, \tilde{\psi}(x,t))$ ($\tilde{\Psi} : W_2 \times \mathbf{R}^n \to W_2 \times \mathbf{R}^n$ ($W_2 = U \times [c_1, b]$). Пусть $\tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 \circ \Psi : W_2 \times \mathbf{R}^n \to H_{|W_2}$. Как и Φ_2 отображение $\tilde{\Phi}_2$ является тривиализацией расслоения $H_{|W_2}$ и при этом при $c_1 \leq t \leq c_2$ имеет место равенство $\tilde{\Phi}_2(x,t,v) = \Phi_1(x,t,v)$. Тем самым тривиальность расслоения $q_{|W}$ доказана.

Для доказательства "гладкого варианта" теоремы осталось обсудить возможность построения гладкого продолжения функции ψ на $U \times [c_1, b]$ (при условии, конечно, что сама функция ψ является гладкой). Уменьшая, если необходимо, отрезок $[c_1, c_2]$, можно считать, что $\psi(x,t)$ определено для t из некоторой окрестности этого отрезка (впрочем, обычно под гладкой функцией на отрезке подразумевается ограничение некоторой гладкой функции, определённой на его окрестности). Пусть $\tau(t)$ — гладкая (C^∞) монотонная функция, равная t при $t \leq c_2 + \varepsilon_1$ и равная константе $c_2 + \delta$ при $t \geq c_2 + \varepsilon_2$ (ε_1, ε_2 и δ достаточно малы). Тогда $\tilde{\psi}(x,t) = \psi(x, \tau(t))$ — требуемое продолжение функции $\psi(x,t)$. $\blacksquare$

Доказательство Теоремы 2. Для доказательства мы построим отображение $\Pi : H \to H_{|X \times \{0\}}$, накрывающее проекцию $\pi_X : X \times I \to X \times \{0\}$ ($\pi_X(x,t) = (x,0)$, $q \circ \Pi = \pi_X \circ q$) и являющееся (линейным) изоморфизмом на слоях. Такое отображение определяет изоморфизм между расслоениями $q_{|X \times \{0\}}$ и $q_{|X \times \{1\}}$. Пусть $\{U_i\}$ и $\{V_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) — такие локально конечные покрытия многообразия X открытыми множествами, что $\overline{V_i} \subset U_i$, ограничения расслоения q на $U_i \times I$ тривиальны ($\Phi_i : (U_i \times I) \times R^n \to H_{|U_i \times I} (= q^{-1}(U_i \times I)$ — соответствующие тривиализации). Пусть $\xi_i : X \to \mathbf{R}$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю на $\overline{V_i}$ и единице вне U_i, Ξ_i — отображение $(U_i \times I) \times \mathbf{R}^n$ в себя, определённое формулой $\Xi_i(x,t,v) = (x, \xi_i(x)t, v)$. Пусть Π_i — отображение $H \to H$, определённое равенствами $\Pi_i(h) = \Phi_i \circ \Xi_i \circ \Phi_i^{-1}(h)$ при $h \in q^{-1}(U_i \times I)$, $\Pi_i(h) = h$ при $h \in H \setminus q^{-1}(U_i \times I)$. Нетрудно видеть, что отображение $\Pi = \prod_i \Pi_i$ (композиция отображений в любом порядке, например, $\cdots \circ \Pi_2 \circ \Pi_1$) обладает требуемыми свойствами. $\blacksquare$

Замечания. 1. Единственное место, в котором мы использовали предположение, что пространство X является многообразием, — существование функций ξ_i, обладающих описанными свойствами. Из курса анализа мы знаем, что на многообразиях такие функции существуют. Для существования функций с требуемыми свойствами до-

статочно чтобы X было "достаточно хорошим" топологическим пространством. Необходимые условия на X мы здесь обсуждать не будем.
2. Нетрудно видеть, что в действительности утверждение (и доказательство) Теоремы 1 (а также и все сопутствующие утверждения) имеют место не только для векторных расслоений. Например, множество классов эквивалентных расслоений над пространством X со слоем F и со структурной группой $G \subset Homeo(F)$ является гомотопическим инвариантом пространства X.

Небольшое отступление: K–теория.

Мы показали, что множество $Vect(X)$ классов изоморфных векторных расслоений над пространством X является гомотопическим инвариантом. $Vect(X)$ является не просто множеством, а полукольцом. Однако в топологии гораздо удобнее иметь дело с инвариантами, являющимися группами, кольцами,... (в этом случае могут гораздо шире использоваться утверждения из общей алгебры). В топологии, алгебраической геометрии,... широко применяется стандартный метод построения по полукольцу соответствующего кольца. Будучи применённым к полукольцу $Vect(X)$ он даёт так называемый K–функтор $K(X)$ пространства X. В этом случае метод состоит в следующем. Поскольку в полукольце $Vect(X)$ "не хватает" вычитания, его вводят формально, определяя элементы кольца как формальные разности $[E_1] - [E_2]$, где $[E_i]$ — элементы $Vect(X)$, т.е. классы изоморфных векторных расслоений над X (здесь через E принято обозначать расслоение над X, а через $[E]$ — соответствующий класс изоморфных расслоений). При этом считается что $[E_1] - [E_2] = [E'_1] - [E'_2] =$ тогда и только тогда, когда для некоторого расслоения H над пространством X имеет место равенство $E_1 \bigoplus E'_2 \bigoplus H = E'_1 \bigoplus E_2 \bigoplus H$ (изоморфность соответствующих прямых сумм расслоений).

Задача. Показать, что $K(X)$, определяемое описанными образующими и соотношениями, действительно является кольцом.

Задача. Пусть X — компактное многообразие. Доказать, что: 1) любое векторное расслоение над X допускает вложение в тривиальное векторное расслоение $\pi_X : X \times \mathbf{R}^N \to X$ для достаточно большого N; 2) для любого расслоения E над X существует такое векторное расслоение H, что прямая сумма $E \bigoplus H$ является тривиальным расслоением; 3) для расслоений E_1 и E_2 над X $[E_1] = [E_2]$ (в кольце $K(X)$) тогда и только тогда, когда для некоторого тривиального расслоения H имеет место равенство $E_1 \bigoplus H = E_2 \bigoplus H$.