Независимый Московский Университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

II курс, II семестр, 1995/96 уч.г.; лектор С.М.Гусейн–Заде.

Лекция N 4 (7 марта 1996 г.).

Связность в векторном расслоении.

На линейном пространстве $\mathbf{R}^n$ имеется операция дифференцирования по направлению вектора. Если этот вектор — координатный ($\frac{\partial}{\partial x^k}$), то соответствующая производная называется частной производной. Дифференцировать можно как функции на $\mathbf{R}^n$, так и тензорные поля (векторные, ковекторные, ...). Тензорные поля дифференцируются покомпонентно. Например, если $s = s(x)$ — векторное поле ($s = s^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $s^i = s^i(x)$ — компоненты вектора s, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n$), а $v = v^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ — вектор в точке $x_0 \in \mathbf{R}^n$, то производной векторного поля s по направлению вектора v является вектор $\nabla_v s$, компоненты $(\nabla_v s)^i$ которого равны $v^k \frac{\partial s^i}{\partial x^k}(x_0)$. На произвольном гладком многообразии X^n операция, заданная в координатных окрестностях такими формулами, не является корректно определённой — результат (соответствующий тензор) зависит от выбора локальной системы координат. Нашей целью является описание структуры на многообразии, задание которой определяет операцию дифференцирования векторных или общих тензорных полей, аналогичную той, которая существует на $\mathbf{R}^n$.

Тензорные поля на многообразии X — это сечения соответствующего векторного расслоения (так, векторные поля — сечения касательного расслоения $p : TX \to X$). Касательное расслоение к (стандартному) линейному пространству $\mathbf{R}^n$ и соответствующие расслоения тензоров тривиальны и, более того, имеют естественную (стандартную) тривиализацию. Точно так же, как тензорные поля на пространстве $\mathbf{R}^n$, можно дифференцировать сечения стандартного (!) тривиального (d–мерного) векторного расслоения $\pi_1 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^n$ над пространством $\mathbf{R}^n$, т.е. векторно–значные (со значениями в $\mathbf{R}^d$) функции на $\mathbf{R}^n$: $(\nabla_v s)^i = v^k \frac{\partial s^i}{\partial x^k}$ (здесь $s(x) = (s^1(x), \ldots, s^d(x))$). Снова для произвольного векторного расслоения $p : E \to X$ над некоторым (n–мерным) многообразием $X = X^n$ результат применения операции, определённой такой формулой, зависит от выбора локальной тривиализации $\Phi : U \times \mathbf{R}^d \to p^{-1}(U)$. Эта ситуация имеет место даже для векторного расслоения над пространством $\mathbf{R}^n$. Мы знаем, что такое расслоение всегда тривиально. Однако его тривиализация (изоморфизм с $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^d$) определена неоднозначно и формально вычисленная производная зависит от выбора тривиализации.

Прежде чем перейти к операции дифференцирования тензорных полей на многообразии (т.е. — сечений касательного, кокасательного расслоений или расслоения тензоров некоторого типа), рассмотрим операцию дифференцирования сечений произвольного (d–мерного) векторного расслоения $p : E \to X$ над n–мерным многообразием X. От правила (метода) дифференцирования мы будем требовать стандартных свойств дифференцирования, основными из которых являются линейность относительно объекта дифференцирования (производная линейной комбинации сечений равна соответствующей линейной комбинации производных) и линейность относительно вектора, вдоль которого осуществляется дифференцирование. Метод дифференцирования сечений расслоения называется связностью (в этом расслоении).

<u>Замечание.</u> Говорить о выполнении правила дифференцирования произведения — формуле Лейбница — не имеет смысла, поскольку на сечениях векторного расслоения, вообще говоря, нет операции умножения. К этому вопросу мы вернёмся позже (когда будем обсуждать, например, взаимосвязь между связностями в векторном расслоении и в двойственном к нему).

Операция дифференцирования является локальной, т.е. её результат определяется ограничением объекта дифференцирования (в нашем случае — сечения) на сколь угодно малую окрестность U рассматриваемой точки. Над такой достаточно малой окрестностью расслоение p изоморфно тривиальному, т.е. существует его тривиализация $\Phi : U \times \mathbf{R}^d \to p^{-1}(U)$. Зафиксируем такую область U и тривиализацию Φ. Сечение тривиального расслоения $\pi_U : U \times \mathbf{R}^d \to U$ задаётся набором из d (числовых) функций на U. Изоморфизм (тривиализация) Φ позволяет описывать так же сечение s расслоения $p_{|U}$: $s = s^i e_i$, где $e_i = \Phi(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (единица на i-ом месте), $s^i = s^i(x)$.

Производная по направлению вектора v описывает инфинитезимальное изменение объекта при смещении вдоль некоторой (любой) кривой $\gamma(t)$, касающейся вектора v ($\gamma(0) = x_0$, $\frac{d\gamma}{dt}(0) = v$): $\nabla_v s = \lim\limits_{t\to 0} \frac{s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))}{t}$. Если s — сечение расслоения p, то $s(\gamma(t))$ и $s(\gamma(0))$ — элементы разных векторных пространств: $p^{-1}(\gamma(t))$ и $p^{-1}(\gamma(0))$ соответственно. Поэтому их разность $s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))$ не имеет инвариантного смысла. Для того, чтобы из $s(\gamma(t))$ можно было вычесть $s(\gamma(0))$, надо перенести их в одно векторное пространство, например — в $p^{-1}(\gamma(0)) = p^{-1}(x_0)$. Такой перенос определяется семейством преобразований $G(t) : p^{-1}(\gamma(t)) \to p^{-1}(x_0)$, про которое мы будем предполагать, что оно обладает всеми необходимыми нам свойствами гладкости (например, является C^∞). Преобразование $G(0) : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_0)$, естественно, является тождественным. В таком случае (корректно определённым) аналогом разности $s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))$ является $G(t)s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))$, а производная $\nabla_v s$ определяется как $\lim\limits_{t\to 0} \frac{G(t)s(\gamma(t))-s(\gamma(0))}{t}$.

В координатах, определяемых изоморфизмом Φ, $G(t)$ является отображением $\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$. Имеем $\nabla_v s = \lim\limits_{t\to 0} \frac{G(t)s(\gamma(t))-s(\gamma(0))}{t} = (\lim\limits_{t\to 0} \frac{G(t)s(\gamma(t))-G(t)s(\gamma(0))}{t} + \frac{G(t)s(\gamma(0))-G(0)s(\gamma(0))}{t}) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{s(\gamma(t))-s(\gamma(0))}{t} + \lim\limits_{t\to 0} \frac{G(t)-G(0)}{t} s(\gamma(0)) = \frac{ds(\gamma(t))}{dt}_{|t=0} + \frac{dG}{dt}(0)s(x_0) = \frac{ds(\gamma(t))}{dt}_{|t=0} + \Omega s(x_0)$, где $\Omega = \frac{dG}{dt}(0)$ — отображение $\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$. Все эти вычисления имеют смысл в координатах и поэтому инвариантность участвующих в них членов не требуется. Из формулы $\nabla_v s = \frac{ds(\gamma(t))}{dt}_{|t=0} + \Omega s(x_0)$ и линейности производной относительно объекта дифференцирования (т.е. — относительно s) следует, что отображение $\Omega : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ является линейным. Результат дифференцирования (фиксированного) сечения s должен зависеть только от вектора v, вдоль которого вычисляется производная. Таким образом линейный оператор Ω является функцией вектора v: $\Omega = \Omega(v)$ ($v \in T_{x_0}X$), что определяет отображение $\Omega : T_{x_0}X \to L(d)$ ($L(d)$ — пространство линейных операторов $\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$). Линейность производной относительно вектора, вдоль которого она вычисляется, означает линейность этого отображения. Если v — координатный вектор $\frac{\partial}{\partial x^k}$, то производная $\nabla_v s$ обычно обозначается через $s_{;k}$. Пусть $\Omega_k = \Omega(\frac{\partial}{\partial x^k})$, Ω^i_{jk} — матричные элементы опратора Ω_k ($k = 1, \ldots, n$, $i, j = 1, \ldots, d$). Окончательно имеем

$$s^i_{;k} = \frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Omega^i_{jk} s^j. \qquad (*)$$

Таким образом правило дифференцирования сечений расслоения p (т.е. — связность в нём) в области U определяется набором чисел Ω^i_{jk}.

Эта формула имеет место для фиксированной тривиализации Φ. Пусть (в координатной форме) расслоение $p : E \to X$ определяется покрытием $\{U_\alpha\}$ и функциями перехода $\psi_{\alpha\beta}$. Компоненты сечения s и матричные элементы оператора Ω_k свои для каждой карты U_α (т.е. для каждой тривиализации Φ_α; пока предположим, что локальные координаты на самом многообразии X в рассматриваемой области фиксированны). Поэтому правильнее было бы написать

$$^{(\alpha)}s^i_{;k} = \frac{\partial\, ^{(\alpha)}s^i}{\partial x^k} + {}^{(\alpha)}\Omega^i_{jk} \cdot {}^{(\alpha)}s^j.$$

Аналогичная формула имеет место и в карте U_β. В соответствии с определением функций перехода имеем

$$^{(\alpha)}s^i = {\psi_{\alpha\beta}}^i_\ell \cdot {}^{(\beta)}s^\ell$$

(${\psi_{\alpha\beta}}^i_\ell = {\psi_{\alpha\beta}}^i_\ell(x)$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$). Подставляя это выражение в (*), получаем

$${\psi_{\alpha\beta}}^i_\ell \cdot {}^{(\beta)}s^\ell_{;k} = \frac{\partial}{\partial x^k}({\psi_{\alpha\beta}}^i_\ell \cdot {}^{(\beta)}s^\ell) + {}^{(\alpha)}\Omega^i_{jk} \cdot {\psi_{\alpha\beta}}^j_\ell \cdot {}^{(\beta)}s^\ell =$$

$$\frac{\partial {\psi_{\alpha\beta}}^i_\ell}{\partial x^k} \cdot {}^{(\beta)}s^\ell + {\psi_{\alpha\beta}}^i_\ell \cdot \frac{\partial\, ^{(\beta)}s^\ell}{\partial x^k} + {}^{(\alpha)}\Omega^i_{jk} \cdot {\psi_{\alpha\beta}}^j_\ell \cdot {}^{(\beta)}s^\ell.$$

Умножая правую и левую части равенства на ${\psi^{-1}_{\alpha\beta}}^m_i$ и сворачивая (т.е. суммируя) по i, получаем

$$^{(\beta)}s^m_{;k} = \frac{\partial\, ^{(\beta)}s^m}{\partial x^k} + {\psi^{-1}_{\alpha\beta}}^m_i \cdot \frac{\partial {\psi_{\alpha\beta}}^i_\ell}{\partial x^k} \cdot {}^{(\beta)}s^\ell + {\psi^{-1}_{\alpha\beta}}^m_i \cdot {}^{(\alpha)}\Omega^i_{jk} \cdot {\psi_{\alpha\beta}}^j_\ell \cdot {}^{(\beta)}s^\ell =$$

$$= \frac{\partial\, ^{(\beta)}s^m}{\partial x^k} + {}^{(\beta)}\Omega^m_{\ell k} \cdot {}^{(\beta)}s^\ell.$$

Отсюда вытекает следующее правило преобразования величин Ω^i_{jk}

$$^{(\beta)}\Omega^m_{\ell k} = {\psi^{-1}_{\alpha\beta}}^m_i \cdot {}^{(\alpha)}\Omega^i_{jk} \cdot {\psi_{\alpha\beta}}^j_\ell + {\psi^{-1}_{\alpha\beta}}^m_i \cdot \frac{\partial {\psi_{\alpha\beta}}^i_\ell}{\partial x^k}.$$

Второе слагаемое в этой формуле делает правило преобразования величин Ω^i_{jk} (как зависящих от индексов i и j, при фиксированном индексе k) не похожим на правило преобразования тензоров. В то же время Ω — линейная функция на касательном пространстве $T_{x_0}X$, т.е. как набор величин, зависящих от индекса k, (с фиксированными индексами i и j) он является тензором типа (0,1). Этот факт даёт следующее правило преобразования при переходе от локальных координат x^k на многообразии X к координатам $\tilde{x}^k$:

$$\tilde{\Omega}^i_{jk} = \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^k} \cdot \Omega^i_{jm}.$$

Пусть $p : E \to X$ — векторное расслоение с заданной на нём связностью.

__**Определение.**__ Сечение s расслоения p называется (ковариантно) постоянным, если его производная $\nabla_v s$ по направлению любого вектора v равна нулю.

__**Теорема.**__ На любом векторном расслоении существует связность.

__**Доказательство.**__ Идея доказательства аналогична, например, той, которая использовалась при доказательстве существования римановой метрики на многообразии, и основана на использовании разбиения единицы. Единственное отличие состоит в следующем. Риманова метрика является тензором на многообразии и поэтому линейная комбинация римановых метрик (с неотрицательными коэффициентами, зависящими от точки) снова является метрикой. Для связностей это, вообще говоря неверно. Так, если в расслоении $p : E \to X$ заданы две связности, определённые (в картах (U_α, Φ_α)) наборами коэффициентов ${}^{\alpha}_{1}\Omega^i_{jk}$ и ${}^{\alpha}_{2}\Omega^i_{jk}$ соответственно, то "сумма" этих связностей (т.е. набор коэффициентов ${}^{\alpha}_{1}\Omega^i_{jk} + {}^{\alpha}_{2}\Omega^i_{jk}$) связностью не является (этот набор чисел "неправильно" преобразуется при переходе от карты к карте). Однако "полусумма" связностей (набор коэффициентов $\frac{1}{2}({}^{\alpha}_{1}\Omega^i_{jk} + {}^{\alpha}_{2}\Omega^i_{jk})$) связностью является.

Очевидно, что на тривиальном расслоении связность существует. По сути дела это обсуждалось в начале лекции. Например, она может быть определена тем, что при фиксированной тривиализации (!) все коэффициенты Ω^i_{jk} тождественно равны нулю. Пусть (в координатной форме) расслоение $p : E \to X$ определяется покрытием $\{U_\alpha\}$ и функциями перехода $\psi_{\alpha\beta}$. Для каждого α выберем какую-нибудь связность ${}_{\alpha}\Omega$ в тривиальном расслоении $p_{|U_\alpha} : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ (например, положив соответствующие коэффициенты ${}^{(\alpha)}_{\alpha}\Omega^i_{jk}(x)$ в карте (U_α, Φ_α) тождественно равными нулю). Пусть ${}^{(\beta)}_{\alpha}\Omega^i_{jk}(x)$ — коэффициенты этой связности в карте (U_β, Φ_β) (они получаются в соответствии с описанными правилами преобразования и определены не на всём множестве U_β, а только для $x \in U_\alpha \cap U_\beta$). Пусть $\{\xi_\alpha\}$ — разбиение единицы на многообразии X, вписанное в покрытие $\{U_\alpha\}$, т.е. — набор функций $\xi_\alpha : X \to \mathbf{R}$, такой что: $\xi_\alpha(x) \geq 0$, $\sum\limits_\alpha \xi_\alpha(x) \equiv 1$, носитель $\operatorname{supp} \xi_\alpha$ функции ξ_α содержится в U_α, семейство множеств $\{\operatorname{supp} \xi_\alpha\}$ является локально–конечным. Определим набор коэффициентов ${}^{(\beta)}\Omega^i_{jk}(x)$ в карте (U_β, Φ_β) формулой ${}^{(\beta)}\Omega^i_{jk}(x) = \sum\limits_\alpha \xi_\alpha(x) \cdot {}^{(\beta)}_{\alpha}\Omega^i_{jk}(x)$. Вне U_α (т.е. там, где функция ${}^{(\beta)}_{\alpha}\Omega^i_{jk}(x)$ не определена, а $\xi_\alpha(x)$ равно нулю) произведение $\xi_\alpha(x) \cdot {}^{(\beta)}_{\alpha}\Omega^i_{jk}(x)$ в этой формуле полагается равным нулю. Нетрудно видеть, что при переходе от одной карты к другой набор коэффициентов ${}^{(\beta)}\Omega^i_{jk}(x)$ преобразуется требуемым образом и поэтому определяет связность на расслоении. ■

Задача. Пусть $p : E \to X$ — векторное расслоение над многообразием X, на котором имеется действие компактной группы G (это значит, что группа действует и на базе расслоения X и на его пространстве E и эти действия коммутируют с проекцией p). Сформулировать, что означает инвариантность связности относительно действия группы G. Доказать, что на расслоении p существует инвариантная связность.

Задача* (* *означает факультативность задачи*). Пусть $\mathbf{CP}^1 \cong S^2$ — проективизация векторного пространства $\mathbf{C}^2$, $E = \{(z, x) \in \mathbf{CP}^1 \times \mathbf{C}^2 : z_1 x_2 - z_2 x_1 = 0\}$ ($z = (z_1 : z_2) \in \mathbf{CP}^1$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2$), $p : E \to S^2 = \mathbf{CP}^1$ — естественная проекция ($(z, x) \mapsto z$). Доказать, что $p : E \to S^2$ является (гладким) двумерным вещественным векторным расслоением над двумерной сферой S^2 (оно называется (векторным) расслоением Хопфа). Описать (естественную) связность в этом расслоении (связность будем считать "естественной", если она инвариантна относительно всех движений сферы: сформулировать, что это означает для расслоения Хопфа). Доказать, что ни над какой открытой областью в сфере S^2 не существует (ковариантно) постоянного сечения, отличного от нулевого.

Задача*. Пусть $p : E \to X$ — (d–мерное) векторное расслоение со структурной группой $SO(d)$. Сформулировать, что означает согласованность связности со структурой такого расслоения.