Независимый Московский Университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

II курс, II семестр, 1995/96 уч.г.; лектор С.М.Гусейн–Заде.

Лекция N 5 (14 марта 1996 г.).

Связность в векторном расслоении.

Связности в двойственном расслоении и в расслоении тензоров.

Важнейшими свойствами производной вдоль вектора являются ее линейность (по отношению к объекты дифференцирования и к вектору, вдоль которого вычисляется производная) и выполнение формулы Лейбница (формулы для производной произведения). Линейность производной мы использовали при определении ковариантного дифференцирования (связности) в векторном расслоении. Требование выполнения формулы Лейбница для связности в (произвольном) векторном расслоении не имеет смысла, поскольку на сечениях векторного расслоения, вообще говоря, отсутствует операция произведения. Это требование приобретает смысл (и, более того, является существенным) если наряду с векторным расслоением $p : E \to X$ рассматривать соответствующие ему двойственное расслоение $p^* : E^* \to X$ и расслоения $p^{(a,b)} : T^{a,b}E \to X$ тензоров типа (a, b).

Задача. Дать определения этих расслоений.

Сечения расслоений тензоров (даже разных типов) можно перемножать (получая сечение расслоения тензоров другого типа: произведение тензоров типов (a, b) и $(\tilde{a}, \tilde{b})$ является тензором типа $(a+\tilde{a}, b+\tilde{b})$). Если не накладывать дополнительных требований, связности на этих расслоениях не взаимосвязаны. Если же потребовать выполнение формулы Лейбница для производной произведения, а также коммутирования дифференцирования с операцией свёртки, то оказывается, что связность в расслоении p определяет связности во всех этих расслоениях. Формула Лейбница для тензоров типов (a, b) и $(\tilde{a}, \tilde{b})$ выглядит следующим образом:

$$(t^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b} \cdot \tilde{t}\,^{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{\tilde{a}}}_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{\tilde{b}}})_{;k} = (t^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b})_{;k} \cdot \tilde{t}\,^{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{\tilde{a}}}_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{\tilde{b}}} + t^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b} \cdot (\tilde{t}\,^{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{\tilde{a}}}_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{\tilde{b}}})_{;k}.$$

Коммутирования дифференцирования с операцией свёртки достаточно требовать только для тензоров типа $(1, 1)$ (**Почему?**) и в этом случае оно означает, что $((t_i^i)_{;k} = t_{i;k}^i$. При этом t_i^i является скаляром (тензором типа $(0,0)$) и для него ковариантная производная совпадает с обычной: $t_{i;k}^i = \frac{\partial t_i^i}{\partial x^k}$.

Задача. Показать, что эти требования (записанные в координатной форме) на самом деле инвариантны (от тривиализаций в расслоении и координат на базе не зависят).

Покажем, как связность в расслоении $p: E \to X$ определяет связность в двойственном расслоении $p^*: E^* \to X$. Если в координатной форме расслоение p описывается покрытием $\{U_\alpha\}$ и функциями перехода $\psi_{\alpha\beta}$, то расслоение p^* может описываться тем же самым покрытием и некоторыми функциями перехода (**Какими?**). Пусть в карте (U, Φ) $\{\varepsilon^i\} = \{e_i^*\}$ — набор сечений расслоения p^*, двойственный к набору $\{e_i\}$ ($e_i = \Phi(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, $\varepsilon^i = \Phi^*(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, единица на i-ом месте). Сечение t расслоения p^* в рассматриваемой карте определяется набором из d функций t_i: $t = t_i\varepsilon^i$. Пусть связности в расслоениях p и p^* задаются наборами коэффициентов $\Omega_{jk}^i(x)$ и $\omega_{jk}^i(x)$ соответственно:

$$s_{;k}^i = \frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Omega_{jk}^i \cdot s^j, \qquad t_{i;k} = \frac{\partial t_i}{\partial x^k} + \omega_{ik}^j \cdot t_j.$$

Замечание. Правильнее, видимо, было бы писать не $t_{i;k}$, а $t_{;k\;i}$ или $(t_{;k})_i$, но это не принято.

Скалярное произведение (свёртка) $s^i t_i$ сечений s и t является обычной (скалярной) функцией на многообразии X (т.е. сечением стандартного тривиального одномерного расслоения) и её производная совпадает с обычной:

$$(s^i t_i)_{;k} = \frac{\partial s^i t_i}{\partial x^k} = s^i \cdot \frac{\partial t_i}{\partial x^k} + \frac{\partial s^i}{\partial x^k} \cdot t_i. \tag{*}$$

С другой стороны должно выполняться правило Лейбница:

$$(s^i t_i)_{;k} = s_{;k}^i \cdot t_i + s^i \cdot t_{i;k} = (\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Omega_{jk}^i \cdot s^j) \cdot t_i + s^i \cdot (\frac{\partial t_i}{\partial x^k} + \omega_{ik}^j \cdot t_j) =$$

$$= s^i \cdot \frac{\partial t_i}{\partial x^k} + \frac{\partial s^i}{\partial x^k} \cdot t_i + \Omega_{jk}^i \cdot s^j \cdot t_i + s^i \cdot \omega_{ik}^j \cdot t_j =$$

$$= s^i \cdot \frac{\partial\, t_i}{\partial\, x^k} + \frac{\partial\, s^i}{\partial\, x^k} \cdot t_i + s^j \cdot t_i \cdot (\Omega^i_{jk} + \omega^i_{jk}). \qquad (**)$$

Сравнивая формулы (*) и (**) (которые должны выполняться для всех s^j, t_i и k), получаем $\omega^i_{jk} = -\Omega^i_{jk}$, т.е.

$$t_{i;k} = \frac{\partial\, t_i}{\partial\, x^k} - \Omega^j_{ik} \cdot t_j.$$

Можно показать, что (при условии выполнения правила Лейбница) связность в расслоении $p : E \to X$ определяет и связность в расслоении $p^{(a,b)} : T^{a,b}E \to X$ тензоров типа (a,b). При этом имеет место равенство

$$t^{i_1\ldots i_a}_{j_1\ldots j_b;k} = \frac{\partial\, t^{i_1\ldots i_a}_{j_1\ldots j_b}}{\partial\, x^k} + \sum_u \Omega^{i_u}_{\ell k} \cdot t^{i_1\ldots \ell \ldots i_a}_{j_1\ldots j_b} - \sum_v \Omega^{\ell}_{j_v k} \cdot t^{i_1\ldots i_a}_{j_1\ldots \ell \ldots j_b}$$

(в индексах ℓ стоит на u-ом и v-ом местах соответственно).

Например, для тензоров второго порядка имеем

$$t^i_{j;k} = \frac{\partial\, t^i_j}{\partial\, x^k} + \Omega^i_{\ell k} \cdot t^\ell_j - \Omega^\ell_{jk} \cdot t^i_\ell,$$

$$g_{ij;k} = \frac{\partial\, g_{ij}}{\partial\, x^k} - \Omega^\ell_{ik} \cdot g_{\ell j} - \Omega^\ell_{jk} \cdot g_{i\ell},$$

$$g^{ij}_{;k} = \frac{\partial\, g^{ij}}{\partial\, x^k} + \Omega^i_{\ell k} \cdot g^{\ell j} + \Omega^j_{\ell k} \cdot g^{i\ell}.$$

Задача. Доказать эти равенства (для тензоров второго порядка).

Идея доказательства. Для тензора второго порядка, являющегося произведением тензоров первого порядка, указанная формула является непосредственным следствием формулы Лейбница. В общем случае она вытекает из того, что любой тензор второго порядка представим в виде суммы произведений тензоров первого порядка (**Почему?**).

Связности в касательном расслоении.

Касательное расслоение к многообразию X^n является (n–мерным) векторным расслоением над X^n. Общая связность в этом расслоении определяется точно так же, как и в общем случае. Единственным отличием является то, что (локальные) координаты на открытом множестве $U \subset X^n$ определяют координаты на $TU \subset TX^n$; замена локальных координат на X^n индуцирует замену координат в соответствующей карте на TX^n (см. ниже). Чтобы подчеркнуть это отличие, будем по другому обозначать коэффициенты связности. Именно, коэффициенты связности в координатах $\{x^i\}$ в области U_α (и в соответствующих координатах v^i в касательных пространствах T_xU_α в точках $x \in U_\alpha$) будем обозначать через ${}^{(\alpha)}\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$ (вместо Ω^i_{jk} в общем случае). Коэффициенты Γ^i_{jk} называются символами Кристоффеля. Заметим, что в этом случае индекс k пробегает те же значения, что и индексы i и j: от 1 до n. Выведем правило преобразования символов Кристоффеля Γ^i_{jk} при замене локальных координат. Пусть в области U_β заданы локальные координаты $\{\widetilde{x}^i\}$, $\widetilde{v}^i$ — соответствующие координаты векторов в касательных пространствах к точкам X^n, $\widetilde{\Gamma}^i_{jk} = {}^{(\beta)}\Gamma^i_{jk}$ — символы Кристоффеля рассматриваемой связности в этих координатах. Пусть Ω^i_{jk} — коэффициенты рассматриваемой связности в карте с координатами x^i на X^n (точнее — на $U_\alpha \cap U_\beta$) и $\widetilde{v}^{\,i}$ на T_xX^n. В соответствии с формулами, полученными на прошлой лекции, имеем

$$\widetilde{\Gamma}^{\widetilde{i}}_{\widetilde{j}\,\widetilde{k}} = \frac{\partial\, x^k}{\partial\, \widetilde{x}^{\widetilde{k}}} \cdot \Omega^{\widetilde{i}}_{\widetilde{j}\;k} = \frac{\partial\, x^k}{\partial\, \widetilde{x}^{\widetilde{k}}} \cdot (\psi^{-1}_{\alpha\beta}{}^{\widetilde{i}}_{\;i} \cdot \Gamma^{\,i}_{\;jk} \cdot \psi_{\alpha\beta}{}^{j}_{\widetilde{j}} + \psi^{-1}_{\alpha\beta}{}^{\widetilde{i}}_{\;\ell} \cdot \frac{\partial\, \psi_{\alpha\beta}{}^{\ell}_{\widetilde{j}}}{\partial\, x^k}).$$

В соответствии с определением функций перехода имеем

$$\psi_{\alpha\beta}{}^{i}_{\widetilde{i}} = \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{i}}}, \quad \psi^{-1}_{\alpha\beta}{}^{\widetilde{i}}_{\;i} = \frac{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{i}}}{\partial\, x^{\,i}}.$$

Таким образом

$$\widetilde{\Gamma}^{\widetilde{i}}_{\widetilde{j}\,\widetilde{k}} = \frac{\partial\, x^k}{\partial\, \widetilde{x}^{\widetilde{k}}} \cdot \left(\frac{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{i}}}{\partial\, x^i} \cdot \Gamma^i_{jk} \cdot \frac{\partial\, x^j}{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{j}}} + \frac{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{i}}}{\partial\, x^\ell} \cdot \frac{\partial}{\partial\, x^k} (\frac{\partial\, x^\ell}{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{j}}}) \right) =$$

$$= \frac{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{i}}}{\partial\, x^i} \cdot \frac{\partial\, x^j}{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{j}}} \cdot \frac{\partial\, x^k}{\partial\, \widetilde{x}^{\widetilde{k}}} \cdot \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{i}}}{\partial\, x^\ell} \cdot \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{j}} \partial\, \widetilde{x}^{\,s}} \cdot \frac{\partial\, \widetilde{x}^{\,s}}{\partial\, x^k} \cdot \frac{\partial\, x^k}{\partial\, \widetilde{x}^{\widetilde{k}}} =$$

$$= \frac{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{i}}}{\partial\, x^i} \cdot \frac{\partial\, x^j}{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{j}}} \cdot \frac{\partial\, x^k}{\partial\, \widetilde{x}^{\widetilde{k}}} \cdot \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{i}}}{\partial\, x^\ell} \cdot \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial\, \widetilde{x}^{\,\widetilde{j}} \partial\, \widetilde{x}^{\widetilde{k}}}$$

(так как $\dfrac{\partial\,\widetilde{x}^{\,s}}{\partial\,x^k}\cdot\dfrac{\partial\,x^k}{\partial\,\widetilde{x}^{\,\widetilde{k}}}=\delta^s_{\widetilde{k}}$).

Следствия. 1. При аффинных (т.е. неоднородных линейных) заменах координат символы Кристоффеля Γ^i_{jk} преобразуются как компоненты тензора типа (1, 2).
2. Разность $\Gamma^i_{kj}-\Gamma^i_{jk}$ является тензором.

Определение. Тензор $T^i_{kj}=\Gamma^i_{kj}-\Gamma^i_{jk}$ называется тензором кручения связности.

Определение. Связность (в касательном расслоении) называется симметричной, если её тензор кручения тождественно равен нулю, т.е. если $\Gamma^i_{kj}=\Gamma^i_{jk}$

Замечание. Подчеркнём, что эти определения имеют смысл не в произвольном векторном расслоении, а только в касательном.

Определение. Связность в касательном расслоении называется евклидовой, если в некоторых локальных координатах $\{z^i\}$ все её символы Кристоффеля тождественно равны нулю.

Евклидова связность является симметричной. В произвольной локальной системе координат $\{x^i\}$ её символы Кристоффеля определяются формулой

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{\partial\,x^i}{\partial\,z^\ell}\cdot\frac{\partial^2 z^\ell}{\partial\,x^j\partial\,x^k}.$$

Параллельный перенос вдоль кривой.
Связность, согласованная с метрикой.

При описании структуры в векторном расслоении $p:E\to X^n$, позволяющей определить понятие производной сечения s вдоль вектора $v_0\in T_{x_0}X^n$, мы начинали с семейства преобразований $G(t):p^{-1}(\gamma(t))\to p^{-1}(x_0)$, осуществляющих перенос слоёв $p^{-1}(\gamma(t))$ над точками кривой γ, касающейся вектора v_0 ($\gamma(0)=x_0$, $\frac{d\gamma}{dt}(0)=v_0$), в слой над точкой $\gamma(0)=x_0$. Попробуем описать эти преобразования в терминах связности. Пусть s_0 — элемент слоя $p^{-1}(x_0)$, $s_t=G(t)^{-1}s_0$ $v_t=\frac{d\gamma(t)}{dt}\in T_{\gamma(t)}X^n$ — касательный вектор кривой γ в точке $\gamma(t)$. Из определения производной $\nabla_v s$ сечения s как $\lim\limits_{t\to0}\frac{G(t)s(\gamma(t))-s(\gamma(0))}{t}$ вытекает, что $\nabla_{v_0}s=0$. Сделаем (естественное) предположение, что имеет место транзитивность, состоящая в том, что преобразование $G(t)$ переноса слоя $p^{-1}(\gamma(t))$ в слой $p^{-1}(\gamma(0))=p^{-1}(x_0)$ совпадает с суперпозицией преобразований переноса слоя $p^{-1}(\gamma(t))$ в слой $p^{-1}(\gamma(t'))$ и слоя $p^{-1}(\gamma(t'))$ в слой $p^{-1}(\gamma(0))$ (вдоль соответствующих частей кривой γ). Нетрудно видеть, что из этого предположения вытекает, что $\nabla_{v_t} s = 0$ при всех t. Семейство преобразований $G(t)^{-1}$ называется параллельным переносом слоя $p^{-1}(x_0)$ вдоль кривой γ (в соответствии с рассматриваемой связностью), а семейство векторов (т.е. элементов векторного пространства) $s_t = G(t)^{-1} s_0$ — параллельным переносом вектора s_0 вдоль этой кривой. Значения $s_t = G(t)^{-1} s_0 \in p^{-1}(\gamma(t))$ удовлетворяют уравнению $\nabla_{v_t} s = 0$, которое является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с ненулевым коэффициентом при старшей производной и, следовательно, имеет единственное решение.

<u>**Следствие.**</u> Для любой связности в расслоении $p : E \to X$ и любой кривой $\gamma(t)$ семейство преобразований $G(t) : p^{-1}(\gamma(t)) top^{-1}(\gamma(0)) = p^{-1}(x_0)$, соответствующее связности существует и единственно. (Из представления $G(t)^{-1} s_0$ в виде решения (линейного) дифференциального уравнения вытекает, в частности, что преобразования $G(t)$ являются линейными.)

Предположим, что на слоях расслоения $p : E \to X^n$ задано невырожденное скалярное произведение (вообще говоря, не обязательно положительно определённое). Оно определяется сечением $g = \{g_{ij}\}$ расслоения симметричных тензоров типа (0, 2), ассоциированного с расслоением p. Скалярное произведение $g_{ij} s^i r^j$ сечений s и r является скаляром (т.е. — обычной функцией).

<u>**Определение.**</u> Говорят, что связность согласована со скалярным произведением, если параллельный перенос векторов вдоль любой кривой сохраняет скалярное произведение (т.е. если операторы параллельного переноса являются ортогональными).

<u>**Теорема.**</u> Связность согласована со скалярным произведением тогда и только тогда когда производная метрического тензора g вдоль любого направления равна нулю, т.е. $g_{ij;k} \equiv 0$ для всех i, j и k.

<u>**Доказательство.**</u> Пусть s и r — результаты параллельного переноса векторов s_0 и r_0 (из $p^{-1}(x_0)$) вдоль кривой $\gamma(t)$, т.е. решения уравнений $\nabla_{;v} s = \frac{dx^k}{dt} \cdot s_{;k} = 0$ и $\nabla_{;v} r = \frac{dx^k}{dt} \cdot r_{;k} = 0$ соответственно ($\frac{dx^k}{dt} = v^k$ — компоненты касательного вектора v кривой γ). Имеем $0 = \frac{d}{dt}(g_{ij} s^i r^j) = \nabla_{;v}(g_{ij} s^i r^j) = (\nabla_{;v} g_{ij}) \cdot s^i r^j + g_{ij} \cdot (\nabla_{;v} s^i) \cdot r^j + g_{ij} \cdot s^i \cdot (\nabla_{;v} r)^j = v^k \cdot g_{ij;k} \cdot s^i r^j$. Правая часть равна нулю для всех v^k, s^i и r^j тогда и только тогда, когда $g_{ij;k} = 0$.

Симметричное (<u>невырожденное</u>) скалярное произведение на касательном расслоении TX^n к многообразию X^n называется псевдоримановой метрикой (если скалярное произведение положительно определено, то метрика называется римановой). Многообразие с заданной (псевдо)римановой метрикой называется (псевдо)римановым.

<u>Теорема.</u> На (псевдо)римановом многообразии существует единственная симметричная связность, согласованная с метрикой.

<u>Доказательство.</u> Символы Кристоффеля симметричной связности, согласованной с метрикой, удовлетворяют уравнениям $\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}$, $g_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^\ell_{ik} \cdot g_{\ell j} - \Gamma^\ell_{jk} \cdot g_{i\ell} = 0$. Пусть $\Gamma_{i,jk}$ — результат опускания индекса в Γ^i_{kj}, т.е. $\Gamma_{i,jk} = g_{im}\Gamma^m_{jk}$. Имеем $\Gamma_{i,jk} = \Gamma_{i,kj}$. Уравнение $g_{ij;k} = 0$ эквивалентно уравнению

$$\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \tag{a}$$

Циклические перестановки индексов i, j и k в уравнении (a) приводят к уравнениям

$$\Gamma_{j,ki} + \Gamma_{k,ji} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}, \tag{b}$$

$$\Gamma_{k,ij} + \Gamma_{i,kj} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}. \tag{c}$$

Складывая последние два уравнения и вычитая первое, получаем (с учётом симметрии):

$$(b) + (c) - (a) = 2\Gamma_{k,ij} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k},$$

откуда

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right). \tag{†}$$

Формально мы доказали только единственность симметричной связности, согласованной с псевдоримановой метрикой. Её существование следует из следующих рассуждений. В каждой карте рассмотрим связность, коэффициенты которой определяются формулой (†). Нам надо доказать, что получается действительно связность, т.е. при переходе от карты (U_α, Φ_α) к карте (U_β, Φ_β) коэффициенты преобразуются требуемым образом. Рассмотрим связность, получаемую из связности на

U_α при переходе от карты (U_α, Φ_α) к карте (U_β, Φ_β) (т.е. — связность на $U_\alpha \cap U_\beta$, определённую известными нам формулами преобразования). Относительно этой связности производная метрического тензора равна нулю и по доказанному в карте U_β она задаётся такой же формулой (†), что и требовалось доказать.