Независимый Московский Университет
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
II курс, II семестр, 1995/96 уч.г.; лектор С.М.Гусейн–Заде.

Лекция N 6.

Тензор кривизны.

На стандартном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ с метрикой $\sum\limits_{i=1}^{n}(dx^i)^2$ ковариантное дифференцирование совпадает с обычным: символы Кристоффеля связности, согласованной с метрикой тождественно равны нулю в евклидовых координатах. Параллельный перенос векторов вдоль любого пути (в соответствии со связностью) также совпадает с обычным параллельным переносом. Параллельный перенос вдоль петли индуцирует тождественное преобразование векторов касательного пространства. В общем случае это не так. Рассмотрим преобразование касательного пространства, индуцированное его параллельным переносом в положительном направлении вдоль периметра треугольника на стандартной евклидовой двумерной сфере S^2_r радиуса r (образованного большими окружностями). Для того, чтобы проследить за поведением касательных векторов в процессе параллельного переноса, надо воспользоваться двумя фактами. Во–первых, при параллельном переносе сохраняются длины векторов и углы между ними. Во–вторых, при параллельном переносе вдоль большой окружности касательный к ней вектор остаётся касательным. Последний факт следует из того, что метрика на сфере и касательные к большой окружности инвариантны относительно отражения сферы в плоскости этой окружности.

Замечание. Пусть $v = v_t$ — единичные касательные вектора к большой окружности (при некоторой её ориентации). То, что при параллельном переносе вдоль неё касательные вектора переходят в касательные означает, что $\nabla_v v = 0$. Кривая $\ell(t)$ на римановом многообразии X^n, обладающая этим свойством ($\nabla_v v = 0$, где $v = \frac{d\ell(t)}{dt}$) называется геодезической. (**Задача.** Доказать, что в этом случае параметр t на кривой $\ell(t)$ пропорционален натуральному.) Таким образом в соответствии с этим определением большие окружности на сфере являются геодезическими.

Нетрудно понять, что преобразование параллельного переноса вдоль периметра треугольника с углами α, β и γ (в положительном направлении) является поворотом на угол $\omega = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ (снова в положительном направлении). Известно, что угол ω равен площади треугольника, умноженной на коэффициент r^{-2} — так называемую, гауссову кривизну сферы.

Опишем одно из обобщений этого понятия (гауссовой кривизны). Мы (по крайней мере пока) не будем формулировать его специально для связности в касательном расслоении к риманову многообразию (согласованной с метрикой), а опишем его для произвольного (d–мерного) векторного расслоения $p : E \to X^n$ со связностью. В этом случае не имеет смысла говорить о треугольнике, составленном из геодезических (понятие геодезической имеет смысл только для связности в касательном расслоении). Обходы (начинающиеся и заканчивающиеся в точке $x \in X^n$) можно производить в различных двумерных направлениях. Такое направление определяется парой векторов u и v из $T_x X^n$. Удобно рассматривать обход не вдоль периметра треугольника, а вдоль периметра бесконечно малого параллелограмма, построенного на векторах εu и δv. Нетрудно понять, что преобразование касательного пространства, соответствующее такому обходу на стандартной двумерной сфере, является поворотом на угол, равный (по крайней мере — в первом приближении) произведению площади параллелограмма на гауссову кривизну. В общем случае соответствующее преобразование $H = H(\varepsilon, \delta)$ является, конечно, не поворотом, а некоторым линейным оператором, близким к тождественному при малых ε и δ. Мы хотим вычислить главный член в разложении оператора $H - id$ по степеням ε и δ. Нетрудно видеть, что вместо того, чтобы вычислять оператор обхода вдоль периметра параллелограмма и его отличие от тождественного, можно вычислить опраторы H_i полуобходов вокруг параллелограмма (в двух противоположных направлениях) и рассмотреть их разность $H_1 - H_2$ (члены младшей степени в разложении по степеням ε и δ при этом на меняются). Пусть ε и δ столь малы, что рассматриваемый параллелограмм целиком лежит в пределах некоторой координатной карты, над которой расслоение тривиально. Вычисления будем производить в соответствующих координатах. В этих координатах в качестве рассматриваемого параллелограмма будет использовать стандартный (стороны которого являются прямолинейными отрезками).

Чтобы сократить наши вычисления, обратим внимание на следующее. Если ε или δ равно нулю то рассматриваемый параллелограмм — вырожденный и обход вдоль его периметра индуцирует тождественный оператор. Поэтому в разложении оператора $H_1 - H_2$ по степеням ε и δ отсутствуют члены, отвечающие мономам ε^k и δ^k. Младший член, который может присутствосать, отвечает моному $\varepsilon\delta$. Для того, чтобы его вычислить, можно производить вычисления с точностью до членов второго порядка и, кроме того, можно откидывать все члены с ε^2 и δ^2. Все равенства ниже написаны с этой точностью.

Пусть $s = s(x) \in p^{-1}(x)$, $s(x+\varepsilon u)$ — результат параллельного переноса вектора s из слоя над точкой x в слой над точкой $(x+\varepsilon u)$, $s(x+\varepsilon u+\delta v) = H_1(s)$ — результат параллельного переноса вектора $s(x+\varepsilon u)$ из слоя над точкой $(x+\varepsilon u)$ в слой над точкой $(x+\varepsilon u+\delta v)$ (вдоль соответствующих сторон параллелограмма). Аналогично пусть $s(x+\delta v)$ — результат параллельного переноса вектора s из слоя над точкой x в слой над точкой $(x+\delta v)$, $s(x+\delta v+\varepsilon u) = H_2(s)$ — результат параллельного переноса вектора $s(x+\delta v)$ из слоя над точкой $(x+\delta v)$ в слой над точкой $(x+\delta v+\varepsilon u)$. Эти обозначения, конечно, не вполне корректны (так, $s(x+\varepsilon u+\delta v)$ не совпадает с $s(x+\delta v+\varepsilon u)$, но удобны.

Пусть $s(x+tu)$ $(0 \le t \le \varepsilon)$ — вектора в слоях над точками соответствующей стороны, получающиеся параллельным переносом вектора s вдоль неё. Они определяются из уравнений

$$\frac{ds^i(x+tu)}{dt} + u^k \cdot \Omega^i_{jk}(x+tu) \cdot s^j(x+tu) = 0.$$

Из анализа известно, что с точность до членов второго порядка по ε мы имеем:

$$s^i(x+\varepsilon u) = s^i(x) - \varepsilon \cdot u^k \cdot \Omega^i_{jk}(x+\frac{1}{2}\varepsilon u) \cdot s^j(x+\frac{1}{2}\varepsilon u).$$

Откидывая члены порядка ε^2, получаем

$$s^i(x+\varepsilon u) = s^i(x) - \varepsilon \cdot u^k \cdot \Omega^i_{jk}(x) \cdot s^j(x).$$

Вектор $s(x+\varepsilon u+\delta v) = H_1(s)$ получается из вектора $s(x+\varepsilon u)$ аналогичным образом:

$$s^i(x+\varepsilon u+\delta v) = s^i(x) - \varepsilon \cdot u^k \cdot \Omega^i_{jk}(x) \cdot s^j(x) -$$

$$-\delta \cdot v^\ell \cdot \Omega^i_{m\ell}(x+\varepsilon u) \cdot \left(s^m(x) - \varepsilon u^k \cdot \Omega^m_{jk}(x) \cdot s^j(x)\right) =$$

$$= s^i(x) - \varepsilon \cdot u^k \cdot \Omega^i_{jk}(x) \cdot s^j(x) - \delta v^k \cdot \Omega^i_{jk}(x+\varepsilon u) \cdot s^j(x) +$$

$$+\varepsilon\delta \cdot v^\ell \cdot u^k \cdot \Omega^i_{m\ell}(x) \cdot \Omega^m_{jk}(x) \cdot s^j(x).$$

Меняя ε на δ, u на v, ..., получаем для вектора $s(x+\delta v+\varepsilon u) = H_2(s)$:

$$s^i(x+\delta v+\varepsilon u) = s^i(x) - \varepsilon \cdot u^k \cdot \Omega^i_{jk}(x+\delta v) \cdot s^j(x) - \delta \cdot v^k \cdot \Omega^i_{jk}(x) \cdot s^j(x) +$$

$$+\varepsilon\delta \cdot u^\ell \cdot v^k \cdot \Omega^i_{m\ell}(x) \cdot \Omega^m_{jk}(x) \cdot s^j(x).$$

Таким образом

$$\Delta s^i = s^i(x+\varepsilon u+\delta v) - s^i(x+\delta v+\varepsilon u) =$$

$$= \left(\varepsilon \cdot u^k \cdot \Omega^i_{jk}(x+\delta v) \cdot s^j(x) - \varepsilon \cdot u^k \cdot \Omega^i_{jk}(x) \cdot s^j(x)\right) -$$

$$- \left(\delta \cdot v^k \cdot \Omega^i_{jk}(x+\varepsilon u) \cdot s^j(x) - \delta \cdot v^k \cdot \Omega^i_{jk}(x) \cdot s^j(x)\right) +$$

$$+\varepsilon\delta \cdot v^\ell \cdot u^k \cdot \Omega^i_{m\ell}(x) \cdot \Omega^m_{jk}(x) \cdot s^j(x) - \varepsilon\delta \cdot u^\ell \cdot v^k \cdot \Omega^i_{m\ell}(x) \cdot \Omega^m_{jk}(x) \cdot s^j(x) =$$

$$= \varepsilon\delta(u^k \cdot v^\ell \cdot \frac{\partial \Omega^i_{jk}}{\partial x^\ell} - v^k \cdot u^\ell \cdot \frac{\partial \Omega^i_{jk}}{\partial x^\ell} +$$

$$+ v^\ell \cdot u^k \cdot \Omega^i_{m\ell} \cdot \Omega^m_{jk} - u^\ell \cdot v^k \cdot \Omega^i_{m\ell} \cdot \Omega^m_{jk}) s^j =$$

$$= \varepsilon\delta \cdot u^k \cdot v^\ell \cdot \left(\frac{\partial \Omega^i_{jk}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \Omega^i_{j\ell}}{\partial x^k} + \Omega^i_{m\ell} \cdot \Omega^m_{jk} - \Omega^i_{mk} \cdot \Omega^m_{j\ell}\right) s^j.$$

Итак, $\Delta s^i = \varepsilon\delta \cdot u^k \cdot v^\ell \cdot R^i_{jk\ell} \cdot s^j$, где

$$R^i_{jk\ell} = \frac{\partial \Omega^i_{jk}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \Omega^i_{j\ell}}{\partial x^k} + \Omega^i_{m\ell} \cdot \Omega^m_{jk} - \Omega^i_{mk} \cdot \Omega^m_{j\ell}.$$

Нетрудно видеть, что величины $R^i_{jk\ell}$ преобразуются как компоненты тензора типа (1, 1) по индексам i и j (не на многообразии X^n, а на слое расслоения: матричные элементы оператора на нем) и как компоненты тензора типа (0, 2) (на многообразии X^n) по индексам k и ℓ (коэффициеты билинейной формы на (n – мерном) касательном пространстве $T_x X^n$). $R^i_{jk\ell}$ называется тензором кривизны расслоения $p : E \to X^n$. Если $p : E \to X^n$ — касательное расслоение к многообразию X^n (в этом случае мы договаривались писать Γ^i_{jk} вместо Ω^i_{jk}), то $R^i_{jk\ell}$ является тензором типа (1, 3).