Независимый Московский Университет
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
II курс, II семестр, 1995/96 уч.г.; лектор С.М.Гусейн–Заде.
Лекция N 7 (28 марта 1996 г.)

Свойства тензора кривизны.

1) Очевидно, что тензор кривизны кососимметричен по индексам k и ℓ: $R^i_{jk\ell} = -R^i_{j\ell k}$.

2) Непосредственно проверяется, что для симметричной связности имеет место равенство $R^i_{jk\ell} + R^i_{k\ell j} + R^i_{\ell jk} = 0$.

3) Если связность согласована с метрикой g_{ij}, то при фиксированных k и ℓ величины $R^i_{jk\ell}$ являются матричными элементами антисамосопряжённого (относительно рассматриваемой метрики) оператора. Это свойство удобно формулировать в терминах тензора $R_{ijk\ell} = g_{im}R^m_{jk\ell}$ типа $(0, 4)$. Антисамосопряжённость оператора $R^i_{jk\ell}$ означает, что $R_{ijk\ell} = -R_{jik\ell}$.

4) Для симметричной связности согласованной с римановой метрикой, из свойств 1–3 вытекает равенство $R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij}$. (**Докажите** самостоятельно.)

Из описанных свойст вытекает, в частности, что для двумерного риманова многообразия (поверхности) все ненулевые компоненты тензора $R_{ijk\ell}$ отличаются друг от друга только знаком. Таким образом все они определяются одной, например, R_{1212}.

С тензором кривизны (являющимся тензором типа $(1, 3)$) ассоциирована скалярная величина, получающаяся поднятием одного нижнего индекса и полной свёрткой: $R = g^{\ell j}R_{j\ell} = g^{\ell j}R^i_{ji\ell}$. R называется скалярной кривизной.

Задача. Доказать, что для поверхности в трёхмерном пространстве скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой. (Следствием этого факта является то, что гауссова кривизна поверхности является инвариантом римановой метрики на ней, а не зависит от вложения поверхности в пространство.)

Когомологии де Рама.

Нашей дальнейшей целью является использование связностей в векторных расслоениях (и, в частности, в касательных расслоениях к многообразиям) для построения некоторых инвариантов векторных расслоений (и многообразий). Для этого мы сначала опишем ещё один важный гомотопический инвариант многообразия, тесно связанный с дифференциально–геометрическими структурами на нём.

Пусть M^n — гладкое многообразие. Пространства $\Omega^k(M^n)$ дифференциальных k–форм на M^n связаны в последовательность

$$0 \to \Omega^0(M^n) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M^n) \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{k-1}} \Omega^k(M^n) \xrightarrow{d_k} \Omega^{k+1}(M^n) \xrightarrow{d_{k+1}} \ldots$$

$$\ldots \xrightarrow{d_{n-2}} \Omega^{n-1}(M^n) \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M^n) \to 0$$

операторами внешнего дифференцирования $d = d_k : \Omega^k(M^n) \to \Omega^{k+1}(M^n)$ (здесь $\Omega^0(M^n)$ — пространство 0-форм, т.е. – функций на M^n). При этом суперпозиция $d_{k+1} \circ d_k$ двух последовательных операторов равна нулю. Пусть A — некоторое ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей (например, - кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$, поле $\mathbf{R}$ вещественных чисел, поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, ...).

Определение 1. (Коцепным) комплексом называется (возможно - бесконечная) последовательность

$$\to C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{k-2}} C^{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} C^k \xrightarrow{d_k} C^{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} \ldots$$

A-модулей C^k и гомоморфизмов A-модулей $d_k : C^k \to C^{k+1}$, для которых суперпозиция $d_{k+1} \circ d_k$ последовательных гомоморфизмов равна нулю.

Замечание. Для краткости описанный цепной комплекс принято обозначать $C^\bullet$ или (если хотят специально указать на участвующие в его определении гомоморфизмы) $(C^\bullet, d)$. В описываемом контексте термин "коцепной" указывает только на направление стрелок (гомоморфизмов) в последовательности (от C^k к C^{k+1}). Если стрелки направлены в противоположную сторону (от C^{k+1} к C^k), то комплекс принято называть цепным (и ставить номер у модуля внизу: C_k вместо C^k).

Пусть $(C^\bullet, d)$ — коцепной комплекс.

Определение 2. Подмодуль $Z^k = \operatorname{Ker} d_k \subset C^k$ называется модулем k-мерных коциклов (комплекса $C^\bullet$). Подмодуль $B^k = \operatorname{Im} d_{k-1} \subset C^k$ называется модулем k-мерных кограниц.

Для любого k имеем $B^k \subset Z^k$.

Определение 3. Группой $H^k(C^\bullet)$ k-мерных когомологий (или, допуская некоторую вольность языка, k-мерной группой когомологий) коцепного комплекса $C^\bullet$ называется фактормодуль Z^k/B^k модуля коциклов по модулю кограниц.

Замечание. Для цепных комплексов используют термины циклы, границы, группы гомологий $(H_k(C_\bullet))$ соответственно.

Определение 4. Группа $H^k(\Omega^\bullet(M^n))$ когомологий коцепного комплекса $(\Omega^\bullet(M^n), d)$ дифференциальных форм на многообразии M^n называется группой когомологий де Рама многообразия M^n и обозначается $H^k_{dR}(M^n)$.

По определению коциклами комплекса $(\Omega^\bullet(M^n), d)$ являются замкнутые формы, а кограницами – точные. Группа когомологий де Рама – это факторпространство пространства замкнутых форм по подпространству точных.

Определение групп когомологий де Рама – довольно простое. Однако, его трудно использовать для их вычисления. Даже вычисление когомологий де Рама линейного пространства $\mathbf{R}^n$ не является вполне тривиальным. Исходя из определения, легко их вычислить только для точки $*$ и, возможно, для прямой $\mathbf{R}^1$ и для окружности S^1. Так для точки имеем:

$$H^k_{dR}(*) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 0, \\ \mathbf{R} & \text{при } k = 0. \end{cases}$$

. Вычислить группы когомологий де Рама прямой и окружности.

Теорема 1. Группы когомологий де Рама являются гомотопическими инвариантами многообразий, т.е. гомотопически эквивалентные многообразия имеют изоморфные группы когомологий.

Гладкое отображение $f : M^n \to N^p$ индуцирует для любого k отображение $f^* = f^*_k : \Omega^k(N^p) \to \Omega^k(M^n)$ пространств дифференциальных k-форм. Для k–формы $\omega \in \Omega^k(N^p)$ k–форма $f^*\omega \in \Omega^k(M^n)$ называется индуцированной из формы ω при отображении f. Отображение f^* коммутирует с операцией внешнего дифференцирования d и поэтому определяет (линейное) отображение $H^k_{dR}(N^p) \to H^k_{dR}(M^n)$ групп когомологий де Рама, которое мы также будем обозначать через f^* или f^*_k. В лекции 3 мы выяснили, что гомотопическая инвариантность когомологий де Рама вытекает из следующих свойств операции индуцирования:

1) $id_M^* = id_{H^k_{dR}(M)}$;
2) если $f : M^n \to N^p$, $g : N^p \to L^q$, то $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$;
3) если f и g — гомотопные отображения $M^n \to N^p$, то $f^* = g^*$.

Свойства 1) и 2) очевидны. Поэтому Теорема 1 вытекает из:

Теорема 2. Если гладкие отображения f и g многообразий $M^n \to N^p$ гомотопны, то индуцированные отображения f^* и g^* групп когомологий де Рама $(H^k_{dR}(N^p) \to H^k_{dR}(M^n))$ совпадают.

Доказательство теоремы 2. Нетрудно показать, что если гладкие отображения f и g гомотопны, то гомотопия между ними может быть выбрана гладкой. Пусть $f_t : M^n \to N^p$ $(t \in I = [0,1])$ — гладкое семейство отображений, осуществляющее гомотопию между f и g, т.е. $f_0 = f$, $f_1 = g$, F — отображение $M^n \times I \to N^p$, определяемое формулой $F(x,t) = f_t(x)$. Нам надо доказать, что для замкнутой формы ω на многообразии N^p форма $f_1^*\omega - f_0^*\omega$ на многообразии M^n точна, т.е. равна $d\chi$ для некоторой $(k-1)$-формы χ на M^n. При доказательстве мы воспользуемся следующей, широко распространённой в коммутативной алгебре, схемой. Мы построим операторы $D = D_k : \Omega^k(N^p) \to \Omega^{k-1}(M^n)$ (определенные для каждого k на пространстве всех, а не только замкнутых k–форм), для которых имеет место равенство $f_1^* - f_0^* = Dd + dD$ (т.е. ${f_1^*}_k - {f_0^*}_k = D_{k+1}d_k + d_{k-1}D_k$). В этом случае для замкнутой формы ω имеем $f_1^*\omega - f_0^*\omega = d(D\omega)$, что и требовалось.

Замечание. Семейство операторов D_k, обладающих описанными свойствами, называется цепной гомотопией (между f_0^* и f_1^*). Часто при определении цепной гомотопии требуют, чтобы разность $f_1^* - f_0^*$ была равна $\pm Dd \pm dD$, что, конечно, также достаточно для описанных целей.

Пусть ω — k-форма на N^p. Рассмотрим ее обратный образ $F^*\omega$ на многообразии $M^n \times I$. Любая k-форма Ω на декартовом произведении $M^n \times I$ однозначно представима в виде $\Omega_1 + dt \wedge \Omega_2$, где формы Ω_i не содержат дифференциал dt координаты t на отрезке I (их коэффициенты, конечно, являются функциями как от точки $x \in M^n$, так и от $t \in I$). Пусть $F^*\omega = \omega_1 + dt \wedge \omega_2$ — такое представление для формы $F^*\omega$. Определим $D\omega$ формулой

$$D\omega = \int_0^1 \omega_2 dt. \tag{1}$$

Здесь под интегралом понимается интеграл формы по параметру, т.е. –

форма, коэффициенты которой равны интегралам от соответствующих коэффициентов формы ω_2. Для проверки равенства $f_1^*\omega - f_0^*\omega = Dd\omega + dD\omega$ вычислим $f_1^*\omega - f_0^*\omega$, $Dd\omega$ и $dD\omega$. Пусть $i_t : M^n \to M^n \times I$ — вложение, переводящее $x \in M^n$ в $(x,t) \in M^n \times I$. Имеем $F \circ i_t = f_t$, $f_t^*\omega = i_t^* \circ F^*\omega = i_t^*(\omega_1 + dt \wedge \omega_2) = \omega_1|_{t=\mathrm{const}}$. Поэтому

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = \omega_1|_{t=1} - \omega_1|_{t=0} = \int_0^1 \frac{\partial \omega_1}{\partial t} dt. \tag{2}$$

Из (1) следует, что

$$dD\omega = \int_0^1 d_x\omega_2 dt, \tag{3}$$

где через $d_x\omega_2$ обозначен внешний дифференциал формы ω_2 по x-координатам (сумма мономов формы $d\omega_2$, не содержащих дифференциал dt). Для вычисления $Dd\omega$ надо написать представление формы $F^*d\omega$ в виде $\Omega_1 + dt \wedge \Omega_2$. Имеем $F^*d\omega = d(F^*\omega) = d(\omega_1 + dt \wedge \omega_2) = d_x\omega_1 + dt \wedge (\partial\omega_1/\partial t) - dt \wedge d_x\omega_2$, откуда

$$Dd\omega = \int_0^1 (\frac{\partial \omega_1}{\partial t} - d_x\omega_2) dt. \tag{4}$$

Формулы (2), (3) и (4) вместе дают требуемое равенство. Теорема 2 и, следовательно, теорема 1 доказаны.

Поскольку линейное пространство $\mathbf{R}^n$ гомотопически эквивалентно точке, имеем:

Следствие 1.

$$H^k_{dR}(\mathbf{R}^n) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 0, \\ \mathbf{R} & \text{при } k = 0. \end{cases}$$

Следствие 2. (лемма Пуанкаре). Любая замкнутая k-форма на линейном пространстве $\mathbf{R}^n$ точна.

То же самое утверждение имеет место для любой области в $\mathbf{R}^n$, гомотопически эквивалентной точке, например, для шаровой окрестности точки.

Задача. Пусть $\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ — замкнутая k–форма на пространстве $\mathbf{R}^n$. Написать явную формулу, определяющую $(k-1)$–форму χ, для которой $d\chi = \omega$.

Задача. Вычислить группы когомологий n–мерной сферы, плоскости с k выколотыми точками, n–мерного линейного пространства с k выколотыми точками, двумерного тора.