Математический Колледж НМУ.
Дифференциальные уравнения. Экзамен 18 декабря 1993г.

Пусть

$$\left\{\begin{array}{lcrcr} \dot{x} & = & xy & - & 2y \\ \dot{y} & = & 2x^3 & - & x^4 \end{array}\right. \qquad (*)$$

1. (1) Найдите все неподвижные точки.
2. (2) Линеаризуйте систему $(*)$ в каждой неподвижной точке.
3. (3) Исследуйте устойчивость (по Ляпунову и асимптотическую) линеаризованных систем в каждой неподвижной точке.
4. (6) Изобразите орбиты системы $(*)$ на фазовой плоскости.
5. (3) Исследуйте устойчивость (по Ляпунову и асимптотическую) неподвижных точек нелинейной системы $(*)$.
6. (4) Есть ли у системы $(*)$ неограниченные решения?
7. (4) Найдите начальные условия для всех периодических решений системы $(*)$.

   Пусть $\binom{x}{y} = \varphi(a,t)$ — решение системы $(*)$ с начальным условием

$$\varphi(a,0) = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$$

8. (5) Найдите $\lim_{t\to\infty} \varphi(1,9;t)$.
9. (4) Вычислите производную $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial a}\right|_{a=0}$.
10. (6) Найдите первый член, не постоянный по t, ряда Тейлора

$$\varphi(a,t) = \varphi_0(t) + a\varphi_1(t) + a^2\varphi_2(t) + \ldots$$