Математический колледж НМУ
Экзамен по геометрии. 1 курс, 1 семестр. 13 февраля 1993г.

---

1. *(10)* $a_1, \ldots, a_n$ — точки в $\mathbf{R}^3$. Привести к каноническому виду форму

$$\sum_{i=1}^{n} d^2(a_i, x),$$

где $d(x, y)$ — расстояние между точками x и y.

2. *(15)* Рассмотрим на плоскости Лобачевского множество O, которое в модели Пуанкаре является окружностью $|z - i|^2 = 1$.
а) доказать, что прямые, проходящие через точку (0,0), ортогональны O;
б) найти все движения плоскости Лобачевского, переводящие O в себя.

3. *(15)* Точки v_i являются вершинами правильного n-угольника P с центром в точке 0. Может ли сумма

$$\frac{1}{2}\left(|v_1, v_2| + |v_2, v_3| + \cdots + |v_{n-1}, v_n| + |v_n, v_1|\right)$$

превышать площадь P? ($|v_i, v_k|$ — определители)

4. *(15)* Окружность касается параболы $(8 + 4\sqrt{2})y = x^2$ и ее директрисы, причем их общая касательная составляет с директрисой угол в $45°$. Найти радиус окружности и убедиться, что это целое число.

5. *(15)* Может ли пересечение плоскости и положительного ортанта в $\mathbf{R}^4$ (т.е. множества $\{X \subset \mathbf{R}^4 : x_i \geq 0\}$) быть квадратом?

6. *(20)* Пусть граница замкнутого выпуклого тела K с непустой внутренностью есть непустое выпуклое множество. Доказать, что K — замкнутое полупространство.